



**APUNTES DE MECÁNICA**  
**3° AÑO**  
**INGENIERIA ELECTROMECHANICA**



## **BOLILLA N° 1**

### **MOVIMIENTOS RELATIVOS**

- SISTEMAS DE REFERENCIA. DERIVADA RELATIVA DE UN VECTOR.
- VELOCIDAD Y ACELERACIÓN EN EL MOVIMIENTO RELATIVO. ACELERACIÓN COMPLEMENTARIA O DE CORIOLIS. INTERPRETACIÓN FÍSICA.
- MOVIMIENTO RESPECTO A UNA TRANSLACIÓN.
- MOVIMIENTO RESPECTO A UNA ROTACIÓN UNIFORME.
- VELOCIDAD RELATIVA ENTRE DOS PUNTOS MÓVILES.

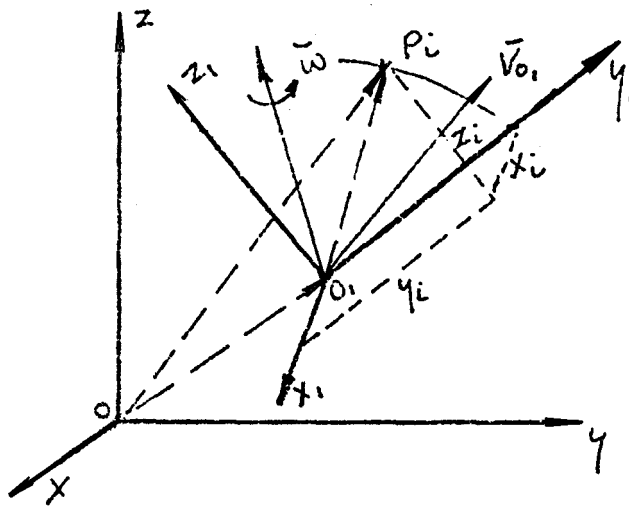


## Movimiento Relativo

Supongamos una terna móvil que se desplaza respecto a una fija y lo hace con un movimiento de traslación identificado por  $\vec{V}_0$  y uno de rotación que responde al vector  $\vec{\omega}$  aplicado en  $O_1$ .

Estos parámetros son los que establecen el movimiento de arrastre.

En el espacio definido por la terna móvil, un punto se mueve respecto a esta, con movimiento relativo; el movimiento absoluto puede considerarse como composición de ambos movimientos, siendo en consecuencia el movimiento resultante, que está evidentemente referido a la terna fija.



El movimiento relativo podemos estudiarlo considerando la terna  $O_1; x_i; y_i; z_i$  como fija ( $x_{0_1}; y_{0_1}; z_{0_1}$  constantes;  $\bar{i}_1; \bar{j}_1; \bar{k}_1$  constantes;  $x_i; y_i; z_i$  variables).

En el movimiento de arrastre tomamos  $x_i; y_i; z_i$  constantes y  $x_{0_1}; y_{0_1}; z_{0_1}; \bar{i}_1; \bar{j}_1; \bar{k}_1$  variables.

Al considerar el movimiento absoluto deberá tomarse las coordenadas del punto móvil respecto a la terna móvil como variables, y también variables las coordenadas del origen de esta terna ( $x_{0_1}; y_{0_1}; z_{0_1}$ ) y los versores de sus ejes ( $\bar{i}_1; \bar{j}_1; \bar{k}_1$ ).

El vector posición ( $P_i - O$ ) es el que debe considerarse en el estudio del movimiento absoluto, y este resulta ser igual a:

$$(P_i - O) = (P_i - O_1) + (O_1 - O)$$

Vector posición relativo a la terna móvil más el vector posición del origen de la terna móvil respecto a la terna fija.

La derivación una y dos veces de esta expresión nos dará la velocidad y aceleración absolutas del móvil.

Las derivadas deben ser absolutas, es decir referidas a la terna ( $O; x; y; z$ ).

La derivada absoluta de un vector función del tiempo es la variación de este referido a una terna absoluta. El vector posición respecto a la terna móvil tendrá una variación respecto a esta, es una variación relativa y por ende la consideraremos como derivada relativa y la escribimos:

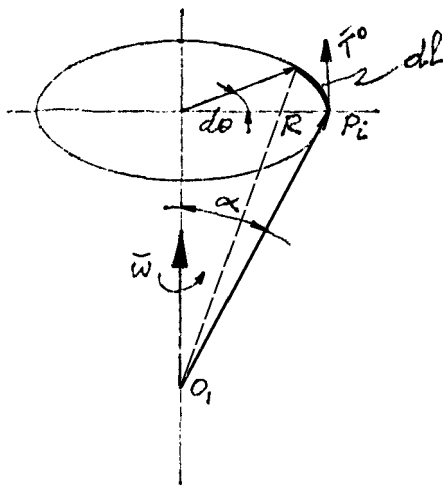


$$\left[ \frac{d(P_i - O_1)}{dt} \right]$$

Para considerar la variación debida al arrastre, supondremos al vector fijo en triedro móvil, variando únicamente debido al arrastre de la terna.

En general el arrastre está compuesto de una translación que no implica variación del vector posición porque se traslada paralelamente a si mismo manteniendo su módulo, y una rotación que sí provoca una variación (en este caso de dirección) del vector posición.

Veamos entonces cual es la variación de un vector de módulo constante que gira en el espacio, esto es determinar la derivada de dicho vector.



Supongamos el vector  $(P_i - O_1)$  de módulo constante que puede girar alrededor del eje  $\omega$ ; el punto  $O_1$  sobre el eje no se mueve y el punto  $P_i$  describe una circunferencia de radio  $R$ .

De acuerdo a lo visto en cinemática del punto:

$$\frac{d(P_i - O_1)}{dt} = \frac{d(P_i - O_1)}{dl} \cdot \frac{dl}{dt}$$

Donde  $dl$  es el camino elemental descrito por el punto  $P_i$ ; como:

$$\frac{d(P_i - O_1)}{dl} = \overline{T^0} \quad \text{y} \quad \frac{dl}{dt} = \frac{R \cdot d\theta}{dt} = R\omega$$

Y siendo:  $R = |P_i - O_1| \cdot \text{sen} \alpha$

Se tiene: 
$$\frac{d(P_i - O_1)}{dt} = |P_i - O_1| \cdot \text{sen} \alpha \cdot \overline{\omega T^0} = \overline{\omega} \wedge (P_i - O_1)$$

Es decir, la derivada de un vector de módulo constante que puede rotar en el espacio es igual al producto vectorial de la rotación  $\overline{\omega}$  por el vector mismo.

La variación total del vector será en consecuencia la variación relativa más la variación de arrastre

$$\frac{d(P_i - O_1)}{dt} = \left[ \frac{d(P_i - O_1)}{dt} \right]_1 + \overline{\omega} \wedge (P_i - O_1)$$

Si quisiéramos encontrar la velocidad absoluta del punto  $P_i$  deberíamos derivar respecto al tiempo el vector posición:  $(P_i - O) - (P_i - O_1) + (O_1 - O)$

Que de acuerdo a lo visto es: 
$$\frac{d(P_i - O)}{dt} = \frac{d(P_i - O_1)}{dt} + \frac{d(O_1 - O)}{dt}$$

$$\overline{V}_2 = \left[ \frac{d(P_i - O_1)}{dt} \right]_1 + \overline{\omega} \wedge (P_i - O_1) + \overline{V}_{O_1}$$

$$\overline{V}_i = \overline{V}_r + \overline{\omega} \wedge (P_i - O_1) + \overline{V}_{O_1} = \overline{V}_r + \overline{V}_a$$

Donde:  $\overline{\omega} \wedge (P_i - O_1) + \overline{V}_{O_1}$  es la velocidad de arrastre, el primer sumando debido a la rotación de la terna móvil y el segundo debido a la translación.



Para determinar la aceleración debemos derivar nuevamente respecto al tiempo:

$$\bar{a}_i = \frac{d\bar{V}_i}{dt} = \frac{d\bar{V}_r}{dt} + \frac{d}{dt} [\bar{\omega} \wedge (P_i - O_1)] + \frac{d\bar{V}_{O1}}{dt}$$

Aquí debemos considerar que también  $\bar{V}_r$  es un vector que puede tener una variación relativa y una de arrastre, en consecuencia:

$$\bar{a}_i = \left[ \frac{d\bar{V}_r}{dt} \right]_1 + \bar{\omega} \wedge \bar{V}_r + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \wedge (P_i - O_1) + \bar{\omega} \wedge \frac{d(P_i - O_1)}{dt} + \bar{a}_{O1}$$

Siendo:

$$\bar{\omega} \wedge \frac{d(P_i - O_1)}{dt} = \bar{\omega} \wedge \left\{ \left[ \frac{d(P_i - O_1)}{dt} \right]_1 + \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1) \right\} =$$

$$\bar{\omega} \wedge \bar{V}_r + \bar{\omega} \wedge [\bar{\omega} \wedge (P_i - O_1)] = \bar{\omega} \wedge \bar{V}_r + \bar{\omega} \cdot [\bar{\omega} \times (P_i - O_1)] - (P_i - O_1) \cdot \omega^2 \quad (1)$$

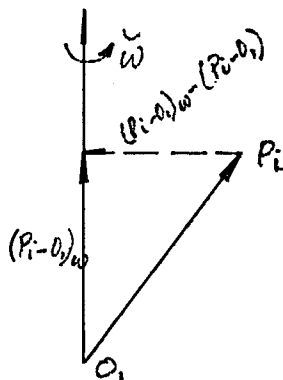
La expresión:  $\bar{\omega} \cdot [\bar{\omega} \times (P_i - O_1)]$

Podemos transformarla en:  $\omega^2 \underbrace{\bar{\omega}^0 \cdot [\bar{\omega}^0 \times (P_i - O_1)]}_{\omega^2 (P_i - O_1)_\omega}$

Donde lo subrayado es el vector  $(P_i - O_1)$  proyectado sobre la dirección de  $\omega$  y lo escribimos  $(P_i - O_1)_\omega$  de tal manera que la expresión (1) queda:

$$\bar{\omega} \wedge \bar{V}_r + \omega^2 (P_i - O_1)_\omega - \omega^2 (P_i - O_1) = \bar{\omega} \wedge \bar{V}_r + \omega^2 [(P_i - O_1)_\omega - (P_i - O_1)]$$

Analicemos el segundo sumando: el vector diferencia encerrado entre corchetes es el radio de giro del punto  $P_i$  alrededor de  $\omega$  y dirigido hacia el centro de curvatura, en consecuencia al multiplicar por  $\omega^2$  nos está dando la aceleración normal o centrípeta:



$$\bar{a}_N = \omega^2 \cdot [(P_i - O_1)_\omega - (P_i - O_1)]$$

La aceleración queda entonces:

$$\bar{a}_i = \bar{a}_r + \bar{\omega} \wedge \bar{V}_r + \bar{a}_\omega \wedge (P_i - O_1) + \bar{\omega} \wedge \bar{V}_r + \bar{a}_N + \bar{a}_{O1}$$

El término  $\bar{a}_\omega \wedge (P_i - O_1)$  es la aceleración tangencial, y el término que se repite  $\bar{\omega} \wedge \bar{V}_r$ , (uno proviene de la derivación de  $\bar{V}_r$  y otro de la derivación de  $\bar{V}_a$ ) lo

agrupamos en uno solo y nos queda:  $\bar{a}_i = \bar{a}_r + \bar{a}_T + \bar{a}_N + \bar{a}_{O1} + 2\bar{\omega} \wedge \bar{V}_r$



Las aceleraciones tangencial y normal debido a la rotación, y la de traslación  $\bar{a}_{O_1}$  constituyen la aceleración de arrastre:  $\bar{a}_T + \bar{a}_N + \bar{a}_{O_1} = \bar{a}_{ar}$  y  $2\bar{\omega} \wedge \bar{V}_r$  la llamamos aceleración complementaria o de Coriolis:  $\bar{a}_c$

### Movimiento respecto a una traslación

La terna móvil está animada de un movimiento de traslación.

Si  $\bar{V}_{O_1}$  es la velocidad del punto  $O_1$ ,  $\bar{V}_{a2} = \bar{V}_{O_1}$  y  $\bar{a}_{ar} = \frac{d\bar{V}_{O_1}}{dt}$ , ya que  $\bar{\omega} = 0$ ; luego la aceleración complementaria  $\bar{a}_c = 0$

La VELOCIDAD ABSOLUTA es:  $\bar{V}_{ab} = \bar{V}_r + \bar{V}_{O_1}$

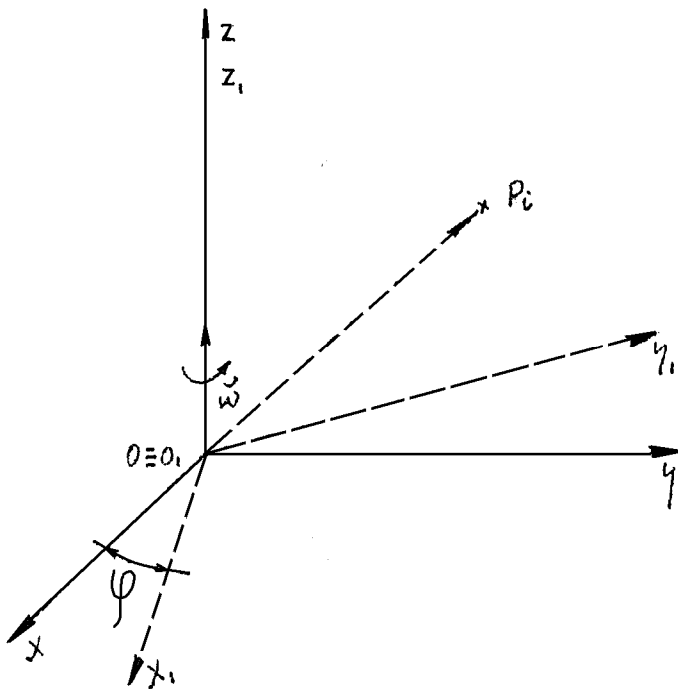
Y la ACELERACIÓN ABSOLUTA es:  $\bar{a}_{ab} = \bar{a}_r + \frac{d\bar{V}_{O_1}}{dt}$

Si  $\bar{V}_{O_1} = cte$ ,  $\frac{d\bar{V}_{O_1}}{dt} = 0 \therefore \bar{a}_{ab} = \bar{a}_r$  que da la importante conclusión:

**“La aceleración del movimiento de un punto es la misma, tanto si el sistema de referencia está quieto o si está animado de una traslación uniforme”.**

### Movimiento respecto a una rotación uniforme

Consideremos que el eje  $z_1$  de la terna móvil coincide con el eje fijo  $z$  coincidente además con el vector rotación  $\bar{\omega}$ . También coinciden  $O$  con  $O_1$ .



$$\bar{\omega} = cte \therefore \varphi = \omega \cdot t + \varphi_0$$

$$\bar{V}_{ar} = \bar{\omega} \wedge (P_i - O)$$

$$\bar{V}_{ab} = \bar{V}_r + \bar{\omega} \wedge (P_i - O)$$

$$\bar{a}_{ar} = \frac{d\bar{V}_{ar}}{dt} = \frac{d[\bar{\omega} \wedge (P_i - O)]}{dt}$$

$$= \bar{\omega} \wedge [\bar{\omega} \wedge (P_i - O)]$$

$$= \bar{\omega} \cdot [\bar{\omega} \times (P_i - O)] - \omega^2 (P_i - O) = \bar{a}_N$$

$$\bar{a}_{ab} = \bar{a}_r + \bar{a}_N + 2\bar{\omega} \wedge \bar{V}_r$$

La velocidad de arrastre en este caso corresponde exclusivamente a la rotación alrededor del eje  $z$  y la aceleración de arrastre es la aceleración normal o centrípeta correspondiente a esa misma rotación.

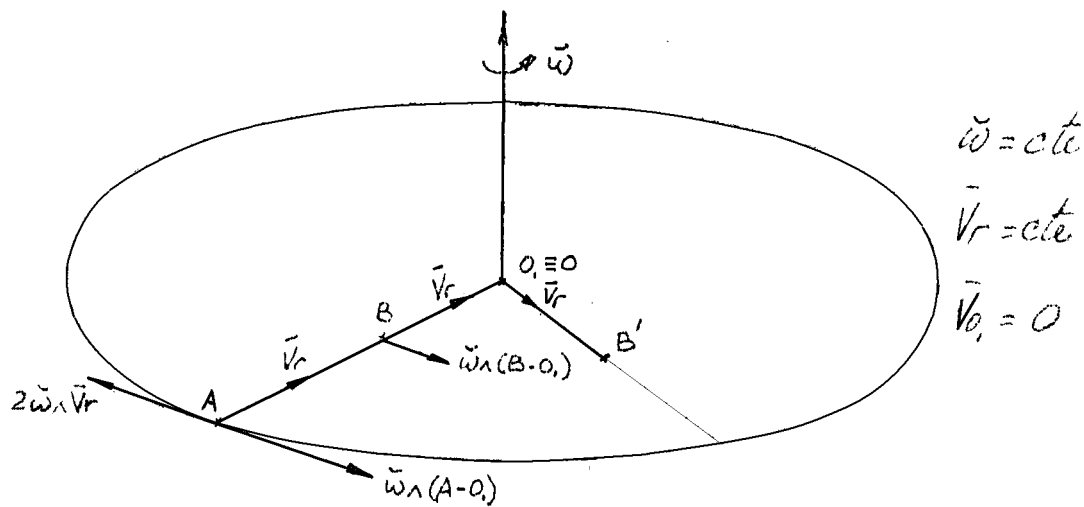


**Interpretación física de la aceleración de Coriolis**

Ejemplo: Supongamos una plataforma circular que gira con velocidad angular constante alrededor de su eje vertical; se pretende hacer que un punto móvil se desplace desde la periferia hacia el centro de la plataforma siguiendo la dirección de un radio de la misma, con velocidad relativa constante.

Estudiaremos como varia la velocidad absoluta y como debe ser la aceleración absoluta para que se cumpla lo propuesto.

Tomaremos los sistemas de referencias como en el caso del movimiento respecto a una rotación uniforme; la plataforma en este caso materializa el sistema móvil.



En el punto A la velocidad absoluta será:  $\bar{V}_{ab_A} = \bar{V}_r + \bar{\omega} \wedge (A - O_1)$  y en el punto B al que llega el móvil al cabo de cierto tiempo  $\Delta t$ :  $\bar{V}_{ab_B} = \bar{V}_r + \bar{\omega} \wedge (B - O_1)$

Es decir cambia únicamente la velocidad de arrastre, su variación está dada por:

$$\Delta \bar{V}_{ar} = \bar{\omega} \wedge (B - O_1) - \bar{\omega} \wedge (A - O_1) = \bar{\omega} \wedge (B - A)$$

Pero el vector  $(B - A)$  representa el camino recorrido en el tiempo  $\Delta t$  con velocidad  $\bar{V}_r$ ; es decir:

$$(B - A) = \bar{V}_r \cdot \Delta t$$

De tal manera, la variación de la velocidad de arrastre es:  $\Delta \bar{V}_{ar} = \bar{\omega} \wedge \bar{V}_r \cdot \Delta t$  o bien

$$\frac{\Delta \bar{V}_{ar}}{\Delta t} = \bar{\omega} \wedge \bar{V}_r \text{ que es la aceleración actuante.}$$

La mitad de la aceleración de Coriolis se utiliza en adecuar la velocidad de arrastre a la nueva posición que tiene el móvil respecto al eje de rotación.

En el intervalo de tiempo  $\Delta t$  debido a la rotación el punto B pasa a la posición B'.

El vector  $\bar{V}_r$  no cambia en magnitud pero si en dirección con respecto al sistema de referencia fijo; esta variación viene expresada de acuerdo a lo visto antes por:

$$\frac{\Delta \bar{V}_r}{\Delta t} = \bar{\omega} \wedge \bar{V}_r, \text{ que es la otra parte de la aceleración de Coriolis que como vemos se utiliza}$$

en hacer rotar la velocidad relativa.



Estas dos funciones de la aceleración de Coriolis se justifican teniendo en cuenta el diferente origen de los términos que se duplican al derivar dos veces al vector posición; unos provenían de la derivación de la velocidad relativa y otros de la derivación de la velocidad de arrastre.

Para terminar hay que observar que en este caso la  $\bar{a}_{ab} = \bar{a}_{ar} + \bar{a}_c$  ya que no hay aceleración relativa ( $\bar{V}_r = cte$ ), la aceleración de arrastre es la aceleración normal o centrípeta:

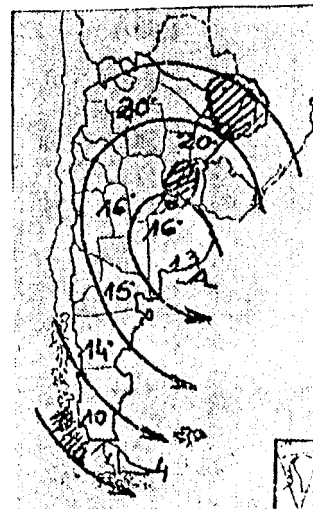
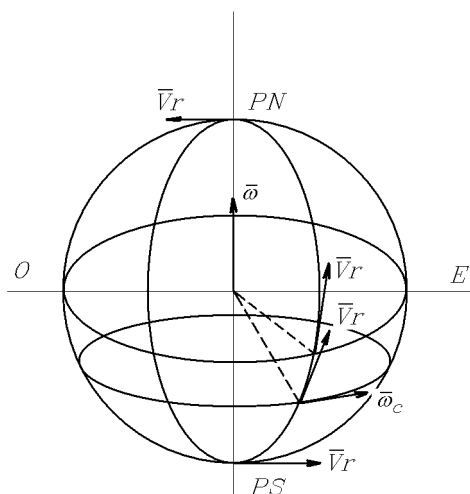
$$\bar{a}_{ar} = -\omega^2(P_i - O_1); \bar{a}_c = 2\bar{\omega} \wedge \bar{V}_r$$

### Caso de la Tierra

Suponiendo todo movimiento sobre la Tierra como relativo, para considerar el movimiento absoluto deberá tenerse en cuenta el movimiento de arrastre de rotación de la Tierra.

Si se pretende que un punto móvil se desplace con  $\bar{V}_r = cte$ , desde un Polo Sur hacia el Norte siguiendo la dirección de un meridiano, se podrá establecer que la aceleración complementaria  $\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \wedge \bar{V}_r$  es máxima en los polos ( $\bar{\omega} \perp \bar{V}_r$ ) y va disminuyendo hasta anularse en el ecuador ( $\bar{\omega} // \bar{V}_r$ ).

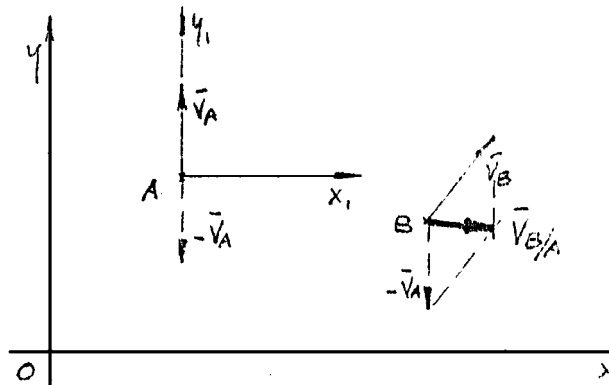
Si no existiera la aceleración complementaria el móvil no podría ir adecuando su velocidad circunferencial de arrastre (nula en los polos y máxima en el Ecuador) y se vería desplazado del meridiano. Esto ocurre cuando no hay una vinculación rígida entre el móvil y la Tierra, como en el caso de las masas de aire que se desplazan en la dirección N-S. Lo anterior explica porque los remolinos giran en sentido antihorario en el hemisferio Sur y en sentido horario en el Norte.



### Velocidad relativa entre dos puntos móviles

Sean dos puntos "A" y "B" de los cuales se conocen las velocidades respecto a una terna fija  $\bar{V}_A$  y  $\bar{V}_B$ , y se quiere determinar la velocidad relativa de "B" respecto de "A".





Esto nos hace suponer que A es el origen de una terna Móvil y todo movimiento relativo a ella se obtendrán restando al movimiento absoluto la velocidad del punto “A” origen de la terna móvil (que sería la velocidad de arrastre).

La velocidad de “B” relativa “A” es entonces:  $\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$

Si se hubiera tomado “B” como origen de la terna móvil se tendría:

$$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B \therefore \vec{V}_{A/B} = -\vec{V}_{B/A}$$



## **BOLILLA N° 2**

### **CINEMÁTICA DEL RÍGIDO**

- COORDENADAS Y GRADOS DE LIBERTAD.
- MOVIMIENTOS SIMPLES: TRANSLACIÓN, ROTACIÓN AXIAL Y POLAR.
- COMPOSICIÓN DE ROTACIONES: POLARES, AXIALES CONCURRENTES Y PARALELAS, PAR DE ROTACIONES. AXÓIDES, POLOIDE Y HERPOLOIDE ESFÉRICAS.
- MOVIMIENTOS ROTOTRASLATORIOS, DIFERENTES CASOS.
- TEOREMA DE CHASLÉS, MOVIMIENTO HELICOIDAL INSTANTÁNEO, EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN.
- COMPOSICIÓN DE ROTACIONES AXIALES ALABEADAS.

#### **TEMAS AGREGADOS:**

- ÁNGULOS DE EULER.
- ESTADO DE VELOCIDAD; ESTADO DE ACELERACIÓN.

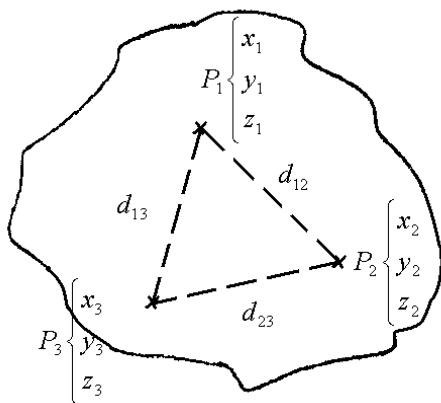


## CINEMÁTICA DEL RIGIDO

Un sólido está determinado **en su posición** cuando lo están tres puntos no alineados del mismo.

Cada punto tomado aisladamente tiene tres coordenadas que pueden variar arbitrariamente (3 puntos x 3 coordenadas = 9 coordenadas).

Sin embargo, por tratarse de un sólido rígido, las coordenadas de los tres puntos no son independientes, sino que están relacionadas por las ecuaciones:



$$(P_1 - P_2)^2 = d_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = cte$$

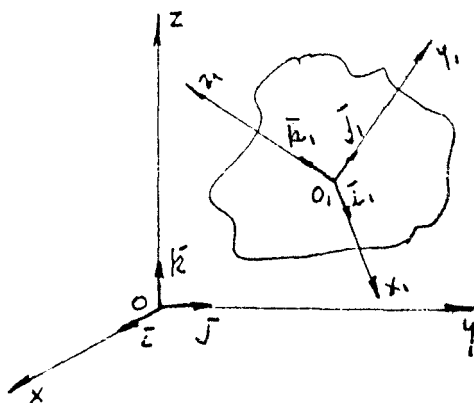
$$(P_1 - P_3)^2 = d_{13}^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = cte$$

$$(P_2 - P_3)^2 = d_{23}^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = cte$$

Que son las condiciones de rigidez.

Las nueve posibilidades de libertad menos las tres condiciones de rigidez nos dan los SEIS CRADOS DE LIBERTAD que podría tener el sólido si no se le impone alguna otra condición.

Para fijar la posición de un sólido en el espacio respecto a una terna fija  $\bar{i}; \bar{j}; \bar{k}$  es común en el estudio cinemático tomar una terna móvil  $\bar{i}_1; \bar{j}_1; \bar{k}_1$  solidariamente unida al sólido; de tal manera que la posición de este quede definida cuando se conocen las tres coordenadas del origen  $O_1$ , y los nueve cosenos directores de sus tres ejes. Pero solo tres cosenos pueden tomarse con libertad, ya que los demás quedan vinculados según las seis siguientes ecuaciones:



$$\bar{i}_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

$$\bar{j}_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

$$\bar{k}_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

$$\bar{i}_1 \cdot \bar{j}_1 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 + \gamma_1 \cdot \gamma_2 = 0$$

$$\bar{i}_1 \cdot \bar{k}_1 = \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \beta_1 \cdot \beta_3 + \gamma_1 \cdot \gamma_3 = 0$$

$$\bar{j}_1 \cdot \bar{k}_1 = \alpha_2 \cdot \alpha_3 + \beta_2 \cdot \beta_3 + \gamma_2 \cdot \gamma_3 = 0$$



### Ángulos de Euler

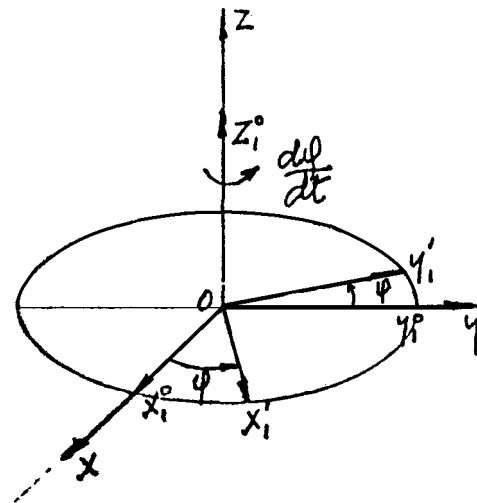
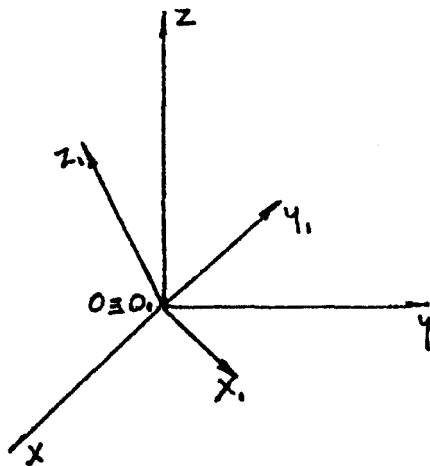
Las seis ecuaciones de condición complican el problema; esta dificultad se salva tomando los ángulos de Euler.

Para pasar del triedro  $O; x; y; z$  al  $O; x_1; y_1; z_1$  se hacen las tres rotaciones siguientes:

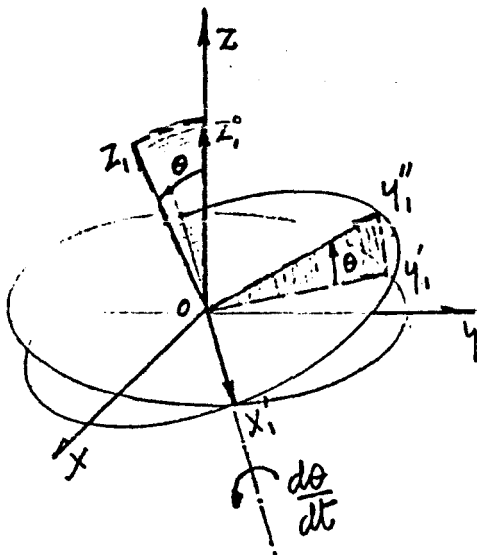
Alrededor del eje  $Oz$  - ángulo  $\varphi$  Precesión.

Alrededor del eje  $Ox_1$  - ángulo  $\theta$  Nutación.

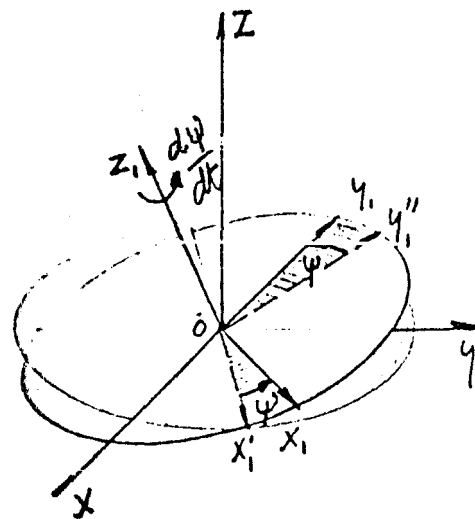
Alrededor del eje  $Oz_1$  - ángulo  $\psi$  Rotación propia o spin.



Rotación Alrededor del eje  $Oz$ .



Rotación Alrededor del eje  $Ox_1$ .



Rotación Alrededor del eje  $Oz_1$ .

Partiendo de la coincidencia de los ejes fijos con los ejes móviles, se puede llegar a una posición cualquiera de los ejes móviles mediante una rotación alrededor del eje  $Oz$  coincidente en este primer momento con  $Oz_1^0$ ; los ejes  $x_1^0$  e  $y_1^0$  permanecen en el plano  $xy$  pero giran un ángulo  $\varphi$  ubicándose en la posición  $x_1'$  e  $y_1'$ .



Una segunda rotación, ahora alrededor del eje  $Oz_1'$  saca al eje  $y_1'$  del plano  $xy$  haciéndolo girar un ángulo  $\theta$  y llevándolo a la nueva posición  $y_1''$ ; también gira un ángulo  $\theta$  el eje  $z_1^0$  pasando a la posición  $z_1$ .

El plano  $z_1y_1''$  es coincidente con el  $z_1^0y_1'$  por haber sido la rotación perpendicular al mismo ya que lo es el eje  $x_1'$ .

La tercera rotación se realiza alrededor del eje  $Oz_1$  y desplaza a los ejes  $x_1'$  e  $y_1''$  en su plano un ángulo  $\psi$  que los lleva a la posición  $x_1; y_1$ .

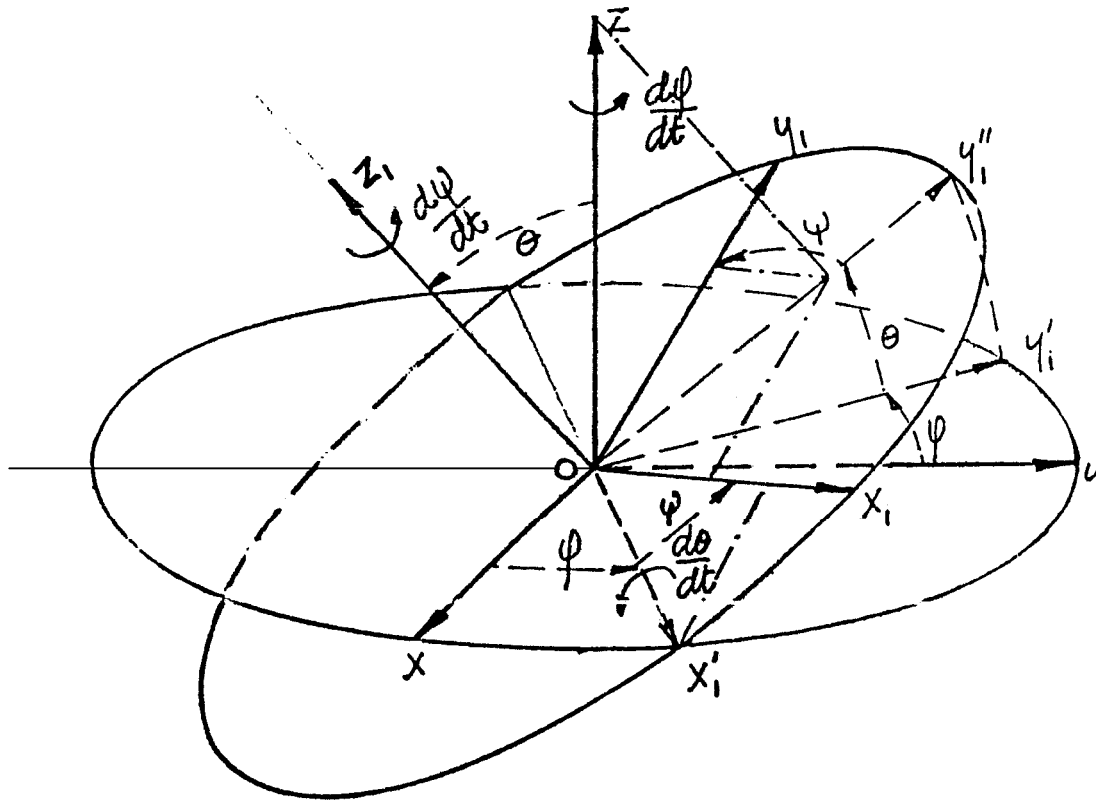
El movimiento quedará cinemáticamente definido cuando los ángulos de Euler puedan expresarse en función del tiempo, en tal caso la rotación de la terna móvil estará dada por:

$$\bar{\omega} = \frac{d\bar{\varphi}}{dt} + \frac{d\bar{\theta}}{dt} + \frac{d\bar{\psi}}{dt}$$

Se trata ahora de determinar las proyecciones o componentes de  $\bar{\omega}$  sobre los ejes de referencia cuando se conocen los ángulos de Euler y sus derivadas.

En la figura siguiente se han proyectado las rotaciones  $\frac{d\bar{\varphi}}{dt}; \frac{d\bar{\theta}}{dt}; \frac{d\bar{\psi}}{dt}$  (identificando su vector con el eje sobre el cual se realiza para no complicar el dibujo) sobre los ejes  $x_1; y_1; z_1$  obteniéndose para cada una de ellas los valores que a continuación se consignan.

<b>Eje</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$
<b>Rotación</b>			
$\frac{d\psi}{dt}$	0	0	$\frac{d\psi}{dt}$
$\frac{d\theta}{dt}$	$\frac{d\theta}{dt} \cdot \cos\psi$	$\frac{d\theta}{dt} \cdot \cos(90 + \psi) = \frac{d\theta}{dt} \cdot \text{sen}\psi$	0
$\frac{d\varphi}{dt}$	$\frac{d\varphi}{dt} \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\psi$	$\frac{d\varphi}{dt} \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\psi$	$\frac{d\varphi}{dt} \cdot \cos\theta$



Los componentes del vector  $\bar{\omega}$  sobre los ejes  $x_1; y_1; z_1$  serán entonces:

$$\omega_{x_1} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\psi + \frac{d\theta}{dt} \cdot \cos\psi$$

$$\omega_{y_1} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\psi + \frac{d\theta}{dt} \cdot \cos\psi$$

$$\omega_{z_1} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \cos\theta + \frac{d\psi}{dt}$$



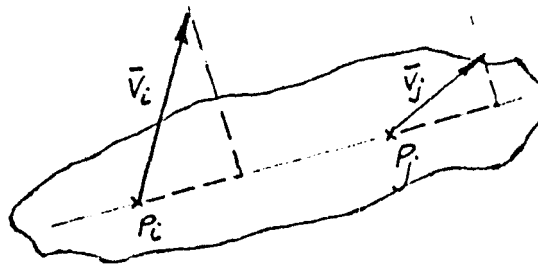
**Movimientos simples**

Do la condición geométrica do rigidez:  $(P_i - P_j)^2 = cte$

Derivando respecto al tiempo:  $2(P_i - P_j) \times \frac{d(P_i - P_j)}{dt} = 0$

$$(P_i - P_j) \times \frac{dP_i}{dt} = (P_i - P_j) \cdot \frac{dP_j}{dt}; \quad \text{div. por } (P_i - P_j); \quad (P_i - P_j) \times \bar{V}_i = (P_i - P_j) \times \bar{V}_j$$

Que nos dice que las velocidades de puntos alineados tienen idéntica proyección sobre la recta que ellos determinan. De no ser así los puntos,  $P_i$  y  $P_j$  se alejarían o acercarían lo que está en contraposición con la condición de sólido rígido.



**Traslación**

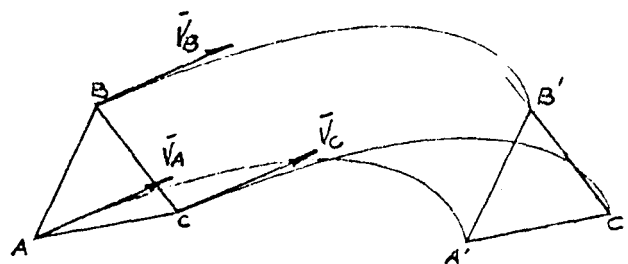
En este caso  $(P_i - P_j)^2 = cte$ , el vector se mantiene constante en módulo dirección y sentido.

$$\frac{d(P_i - P_j)}{dt} = 0; \quad \frac{dP_i}{dt} = \frac{dP_j}{dt}; \quad \bar{V}_i = \bar{V}_j$$

Todos los puntos del cuerpo tienen en cada instante la misma velocidad.

Como:  $\bar{V}_i = \bar{V}_{01} + \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1)$  para una translación  $\bar{\omega} = 0 \therefore \bar{V}_i = \bar{V}_{01}$ .

Si  $\bar{a} = 0$  movimiento uniforme. Si  $\bar{a} \neq 0$  las trayectorias de los puntos del rígido son líneas congruentes igualmente orientadas.





### Rotación

La rotación puede ser AXIAL cuando están fijos dos puntos del sólido y por ende lo están todos los puntos de la recta que ellos determinan, que en este caso se convierte en el eje de rotación.

Si se fija solamente un punto del sólido, este puede pivotar alrededor de él y la rotación es POLAR.

### Rotación axial

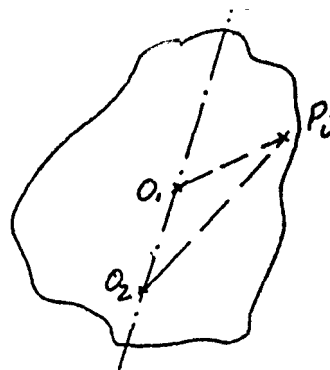
De la condición geométrica de rigidez  $(P_i - O_1)^2 = cte$  derivando respecto al tiempo:

$$(P_i - O_1) \times \bar{V}_i = (P_i - O_1) \times \bar{V}_{O_1}$$

Como:

$$\bar{V}_{O_1} = 0 ; (P_i - O_1) \times \bar{V}_i = 0 \therefore \bar{V}_i \perp (P_i - O_1)$$

Tornando otro punto  $O_2$  resultará  $\bar{V}_i \perp (P_i - O_2)$ , luego  $\bar{V}_i$  es perpendicular al plano formado por  $O_1O_2$  y el punto  $P_i$ .



Es conveniente para individualizar las distintas posiciones de un sólido en rotación, tomar como referencia un semiplano fijo que contenga al eje, tal como es el  $O_1O_2P_i(\pi)$ .

Al cabo de un cierto tiempo  $\Delta t$  el semiplano ha pasado a la posición  $O_1O_2P_i'(\pi')$  habiendo descrito un ángulo  $\Delta\varphi$ .

La relación  $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega$  nos da la velocidad angular media, la velocidad angular instantánea es

$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  que puede expresarse en forma vectorial (como se vio en cinemática del punto).

La velocidad del punto  $P_i$ , puede entonces expresarse:

$$\bar{V}_i = \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1)$$

Cuyo módulo vale:





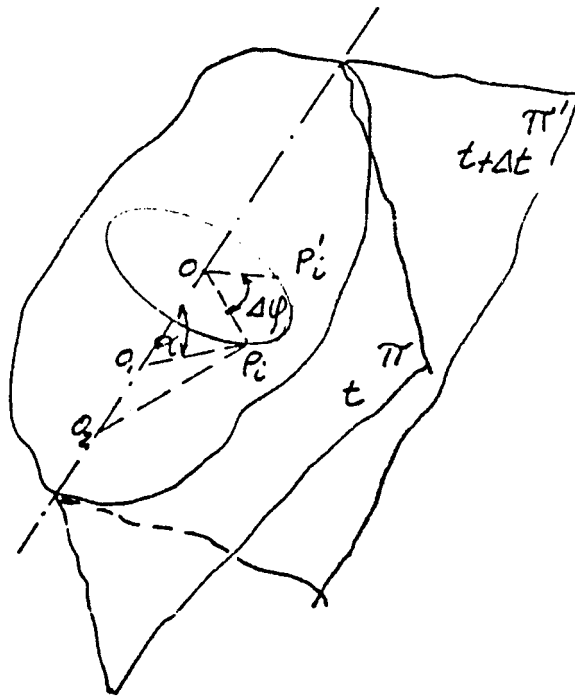
$$V_i = \omega \cdot |P_i - O_1| \cdot \text{sen} \alpha$$

Pero:

$$|P_i - O_1| \cdot \text{sen} \alpha = |P_i - O|$$

Luego:

$$V_i = \omega \cdot |P_i - O|$$



Para obtener la aceleración se deriva la velocidad nuevamente respecto al tiempo:

$$\bar{a}_i = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \wedge (P_i - O_1) + \bar{\omega} \wedge \frac{d(P_i - O_1)}{dt} = \bar{a}_\omega \wedge (P_i - O_1) + \bar{\omega} \wedge [\bar{\omega} \wedge (P_i - O_1)]$$

El primer término es la aceleración tangencial  $\bar{a}_T$ ; el segundo puede desarrollarse:

$$\bar{\omega} \wedge [\bar{\omega} \wedge (P_i - O_1)] = \bar{\omega} [\bar{\omega} \times (P_i - O_1)] - \omega^2 (P_i - O_1)$$

Si el punto  $O_1$  se elige de manera que  $\bar{\omega} \perp (P_i - O_1)$ ;  $\bar{\omega} \times (P_i - O_1) = 0$

Luego:

$$\bar{\omega} \wedge [\bar{\omega} \wedge (P_i - O_1)] = -\omega^2 (P_i - O_1) \text{ Es la aceleración normal } \bar{\omega}_N.$$

### **Rotación Polar**

La velocidad de un punto de un sólido en rotación es:  $\bar{V}_i = \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1)$

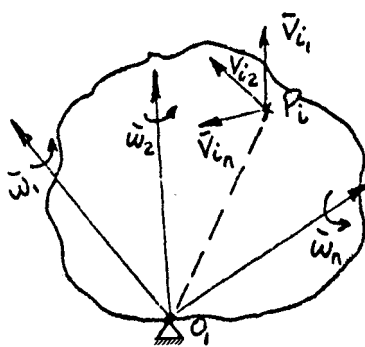


Donde  $\bar{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \bar{\omega}^0$ ;  $\bar{\omega}^0 = f(t)$  el movimiento es polar, el vector  $\bar{\omega}^0$  puede pivotear alrededor de un punto tomando todas las posiciones posibles. (Si  $\bar{\omega}^0 = cte$  la rotación sería axial.)

**COMPOSICIÓN DE ROTACIONES POLARES**

Sea un rígido con movimiento polar rotatorio animado de  $\bar{\omega}_1; \bar{\omega}_2; \dots; \bar{\omega}_n$ .

Si se calculan las velocidades de un punto tal como el  $P_i$  para cada una de las rotaciones como si cada una de ellas estuviera actuando sola, la velocidad resultante será la suma vectorial de las velocidades obtenidas.



$$\bar{V}_{i1} = \bar{\omega}_1 \wedge (P_i - O_1)$$

$$\bar{V}_{i2} = \bar{\omega}_2 \wedge (P_i - O_1)$$

.....

$$\bar{V}_{in} = \bar{\omega}_n \wedge (P_i - O_1)$$

$$\bar{V}_i = \sum_1^n \bar{V}_{ik} = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots + \bar{\omega}_n) \wedge (P_i - O_1)$$

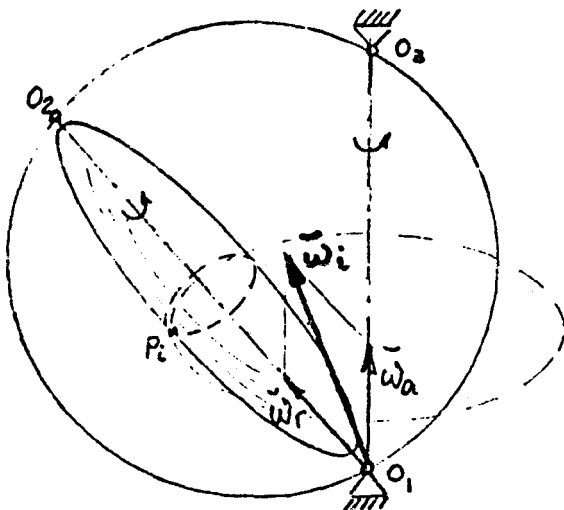
El movimiento resultante es también ROTATORIO POLAR y la velocidad angular de rotación, resulta en cada instante la suma vectorial de las rotaciones actuantes.

**COMPOSICIÓN DE ROTACIONES AXIALES**

**Rotaciones axiales de ejes concurrentes**

Se puede materializar el sistema mediante el dispositivo de la figura.

El sólido puede rotar alrededor del eje  $O_1O_2$  con velocidad  $\bar{\omega}_r$ , el conjunto está sustentado por un aro que a su vez puede girar alrededor del eje  $O_1O_3$  con velocidad  $\bar{\omega}_a$ ; los dos ejes y por ende las dos rotaciones concurren en el punto  $O_1$ .



$$\bar{V}_r = \bar{\omega}_r \wedge (P_i - O_1)$$

$$\bar{V}_a = \bar{\omega}_a \wedge (P_i - O_1)$$

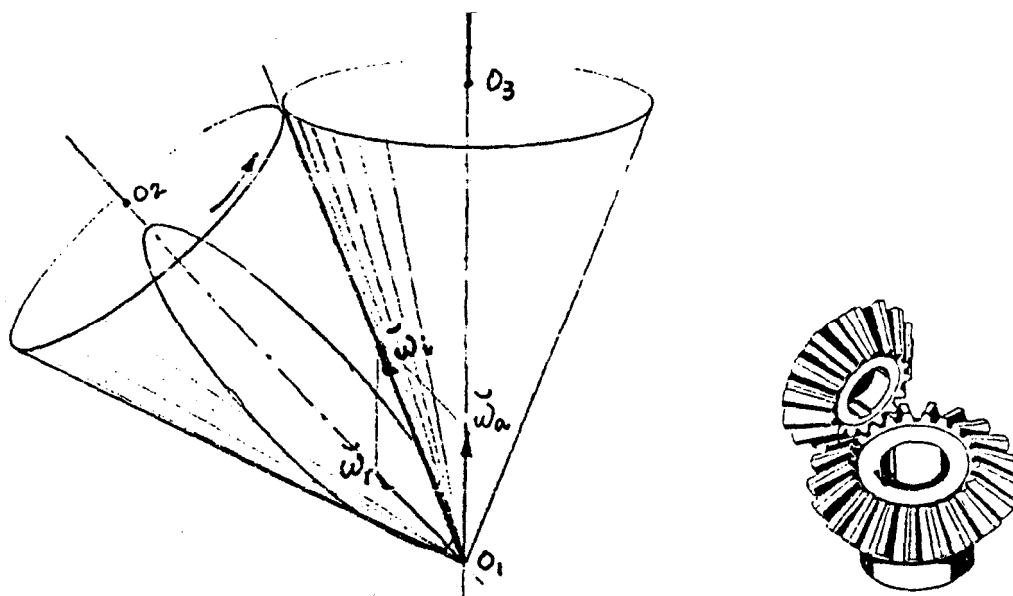
$$\bar{V}_{ab} = (\bar{\omega}_r + \bar{\omega}_a) \wedge (P_i - O_1) = \bar{\omega}_i \wedge (P_i - O_1)$$



El problema se resuelve como en el caso anterior; la última fórmula expresa que el sólido se mueve como si estuviera animado de una rotación única  $\bar{\omega}_i$ ; sin embargo debe considerarse que el movimiento resultante es solo un movimiento ROTATORIO INSTANTÁNEO TANGENTE por cuanto el sólido no cumple con la condición de tener dos puntos fijos, sino uno solo, el  $O_1$ , a este movimiento se lo denomina POLAR o ESFÉRICO.

El punto  $P_i$  cumplirá simultáneamente con un movimiento circular alrededor del eje  $O_1O_2$  y con otro movimiento circular alrededor del eje  $O_1O_3$ ; el vector  $\bar{\omega}_i$  rotación instantánea que resulta de la composición de estos dos movimientos, estará en el plano formado por  $\bar{\omega}_r$  y  $\bar{\omega}_a$ , y como  $\bar{\omega}_r$ , manteniendo fijo  $O_1$ , girará alrededor del eje  $O_1O_3$ ,  $\bar{\omega}_i$  también lo hará, describiendo una superficie cónica que está fija en el espacio; si nos ubicamos sobre el eje  $O_1O_2$  solidario con el móvil, veríamos al vector  $\bar{\omega}_i$  describir otro cono alrededor de este eje, dicha superficie cónica está unida al sólido y se mueve con él, de tal manera que en cada instante la generatriz de contacto de ambos conos coincide con  $\bar{\omega}_i$ .

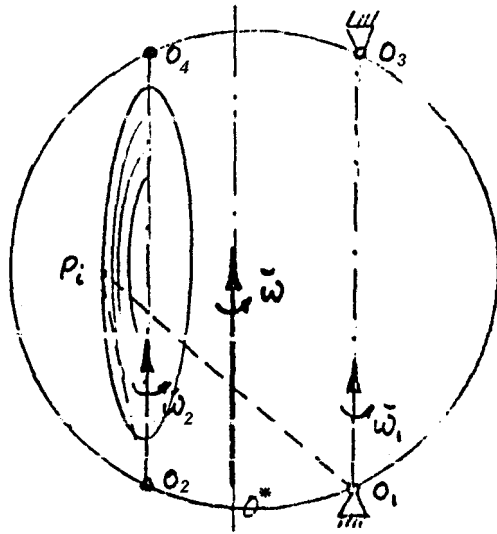
El movimiento propuesto podemos entonces considerarlo como la rodadura sin resbalamiento de una superficie cónica solidaria con el móvil sobre otra superficie cónica fija en el espacio; estas superficies se llaman AXOIDES del movimiento.



Si por el punto  $O_1$  como centro se traza una esfera de radio arbitrario, esta intersectará a las superficies cónicas definidas según dos curvas que serán las directrices de los axoides, la correspondiente al cono móvil se denomina POLOIDE y la del cono fijo HERPOLOIDE, en este caso poloide y herpoloide esféricas por estar dibujadas sobre una esfera. Para una relación  $\frac{\omega_r}{\omega_a}$  constante la poloide y herpoloide resultan ser circunferencias y los axoides, conos circulares, son las superficies primitivas de un par de ruedas cónicas que cumplen con la relación de velocidades dada.

### Rotaciones axiales de ejes paralelos

Materializando el sistema como en el caso anterior se tendrá:



$$\bar{V}_i = \bar{\omega}_1 \wedge (P_i - O_1) + \bar{\omega}_2 \wedge (P_i - O_2)$$

Haciendo  $\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_2} = \lambda$ ;  $\bar{\omega}_2 = \frac{\bar{\omega}_1}{\lambda}$  se puede escribir:

$$\begin{aligned} \bar{V}_i &= \bar{\omega}_1 \wedge (P_i - O_1) + \frac{\bar{\omega}_2}{\lambda} \wedge (P_i - O_2) = \bar{\omega}_1 \wedge \left( \frac{\lambda P_i - \lambda O_1 + P_i - O_2}{\lambda} \right) = \\ &= \bar{\omega}_1 \wedge \frac{\lambda + 1}{\lambda} \left( P_i - \frac{\lambda O_1 + O_2}{\lambda + 1} \right) = \bar{\omega}_1 \frac{\lambda + 1}{\lambda} \wedge \left( P_i - \frac{\lambda O_1 + O_2}{\lambda + 1} \right) \\ \bar{\omega}_1 \frac{\lambda + 1}{\lambda} &= \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_i - \frac{\lambda O_1 + O_2}{\lambda + 1} &= P_i - \frac{\frac{\omega_1}{\omega_2} O_1 + O_2}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2}} = P_i - \frac{\omega_1 O_1 + \omega_2 O_2}{\omega_1 + \omega_2} = (P_i - O^*) \\ \bar{V}_i &= (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \wedge (P_i - O^*) = \bar{\omega} \wedge (P_i - O^*) \end{aligned}$$

**Ejemplo:**

Suponiendo  $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$        $\lambda = 1$        $O^* = \frac{O_1 + O_2}{2}$        $\bar{V}_i = 2\bar{\omega}_1 \wedge (P_i - O^*)$

El punto  $O^*$  se encuentra en el medio de  $O_1 O_2$

**Ejemplo:**

$\bar{\omega}_1 = -\bar{\omega}_2$        $\lambda = -1$

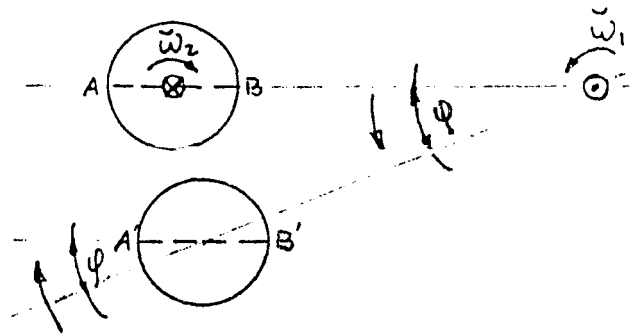
**Par de rotaciones**

De la ecuación  $\bar{V}_i = \bar{\omega}_1 \wedge \left[ (P_i - O_1) + \frac{1}{\lambda} (P_i - O_2) \right] = \bar{\omega}_1 \wedge (P_i - O_1 - P_i + O_2)$



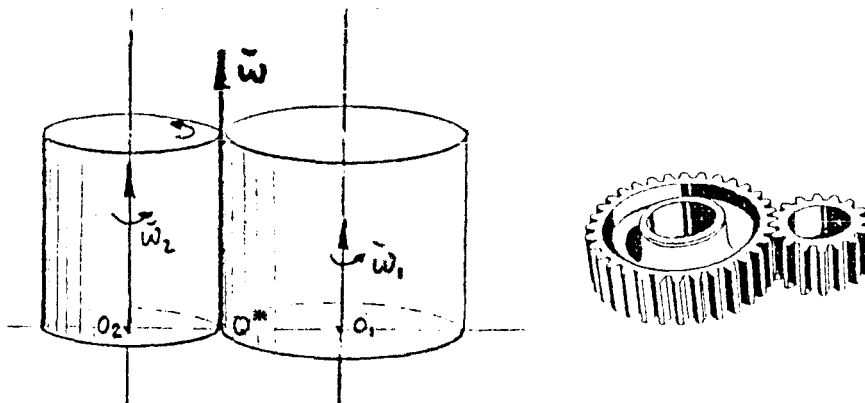
$$\vec{V}_i = \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{O}_2 - \vec{O}_1)$$

Expresión independiente de  $P_i$ ; es decir todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad. ES UNA TRASLACIÓN.



### AXOIDES

Los axoides ahora son superficies cilíndricas y el movimiento se desarrolla como si el cilindro solidario con el móvil rodara sin resbalar sobre el cilindro fijo en el espacio. La generatriz de contacto es el eje instantáneo de rotación.



Los axoides en este caso son las superficies primitivas de un par de ruedas cilíndricas que cumplen con la relación de velocidades dadas.

### Algunas consideraciones prácticas

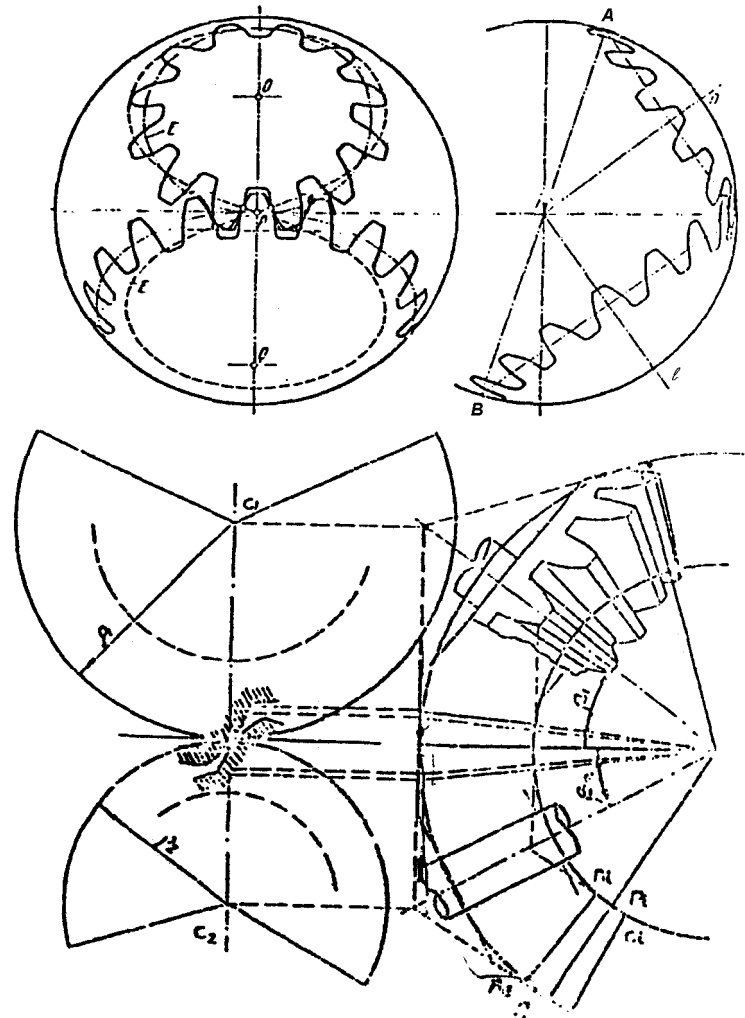
Los axoides obtenidos en el caso de relación de velocidades constante, conos circulares, constituyen un juego de ruedas de fricción cónicas que permitirían establecer el movimiento dado; también pueden considerarse como las superficies primitivas de un par de ruedas dentadas cónicas, donde los dientes son tallados por encima y por debajo de las mismas.

Las superficies laterales de los dientes, como se verá mas adelante, deben ser superficies conjugadas (en este caso son cónicas) que irán entrando gradualmente en contacto, el estudio cinemático se hace sobre un plano perpendicular a dichas superficies.

La Poloide y Herpoloide esféricas mencionadas delimitan casquetes esféricos, que son en cada instante superficies perpendiculares a la generatriz común de contacto, lo lógico sería entonces dibujar el perfil de los dientes sobre estas superficies esféricas, pero dada la dificultad que ello implica, se recurre al método aproximado de "Tredhold" que consiste en reemplazar los casquetes



esféricos por dos conos tangentes a la esfera en los puntos de la poloide y herpoloide, estos conos denominados conos complementarios son desarrollables y sobre ellos se puede dibujar cómodamente los perfiles de los dientes.



## COMPOSICIÓN DE UNA ROTACIÓN CON UNA TRASLACIÓN

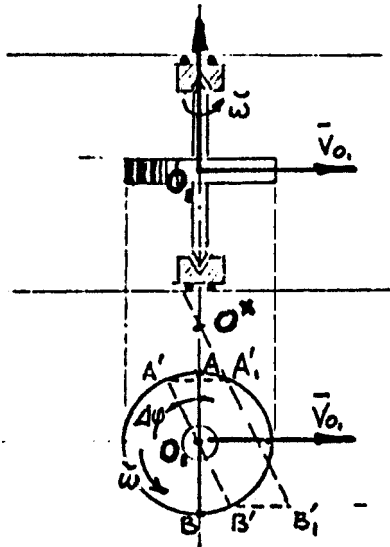
Pueden presentarse tres casos:

1. que la rotación sea perpendicular a la translación;
2. que la rotación y la translación sean paralelas y
3. que la rotación y la translación formen un ángulo cualquiera.

Consideraremos separadamente cada uno de ellos.

### 1) ROTACIÓN PERPENDICULAR A LA TRASLACION

Supongamos un sólido animado de tales movimientos, representado en la figura en sus dos vistas.



$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$$

$$\Delta e = A'A_1' = B'B_1' = V_{O1} \cdot \Delta t$$

$$\bar{V}_{P_i} = \bar{V}_{O1} + \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1)$$

$$\bar{V}_{O^*} = \bar{V}_{O1} + \bar{\omega} \wedge (O^* - O_1) = 0$$

$$\bar{\omega} \wedge (O^* - O_1) = -\bar{V}_{O1}$$

$$(O^* - O_1) = -\frac{\bar{V}_{O1}}{\bar{\omega}} = \frac{\bar{V}_{O1}}{\bar{\omega}} = \frac{\bar{\omega} \wedge \bar{V}_{O1}}{\omega^2}$$

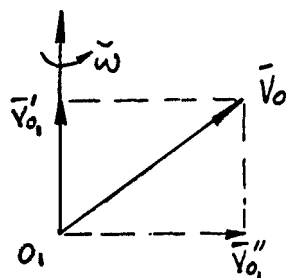
Si en la vista de arriba se marca una recta de referencia tal como la  $AB$  al cabo de cierto tiempo  $\Delta t$  debido a la rotación esta ha pasado a la posición  $A'B'$ , pero como en ese mismo tiempo el sólido se ha trasladado la verdadera posición de  $AB$  es  $A_1'B_1'$  dirección que corta a la  $AB$  en el punto  $O^*$  perteneciente a la terna solidaria con el sólido y que no ha sufrido desplazamiento alguno; como todas las secciones del sólido por planos perpendiculares a  $\bar{\omega}$  se han comportado como la analizada, se puede suponer al movimiento del sólido (para un tiempo  $\Delta t$  muy pequeño) como una rotación instantánea alrededor de un eje paralelo a  $\bar{\omega}$  que pasa por  $O^*$ ; este se denomina EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN.

## 2) ROTACIÓN PARALELA A LA TRANSLACIÓN

En este caso estamos en presencia de un movimiento helicoidal. Si  $\bar{V}_{O1}$  y  $\bar{\omega}$  son constantes cada punto del sólido recorre una hélice cilíndrica circular idéntica al movimiento helicoidal estudiado en cinemática del punto.

## 3) ROTACION Y TRANSLACIÓN FORMANDO UN ÁNGULO CUALQUIERA

Corresponde a un movimiento ROTOTRANSLATORIO general; siempre es posible descomponer la velocidad  $\bar{V}_{O1}$  según una paralela y una normal a  $\bar{\omega}$  y el problema se puede resolver considerándolo como una composición de los dos casos anteriores.





En general un rígido puede estar animado de "n" translaciones y "m" rotaciones y el sistema puede reducirse para un instante determinado a una translación única y a una rotación única aplicada en el centro de reducción (tal como se hacía en estática con un sistema de vectores) (ahora los vectores son las rotaciones y los momentos son las translaciones).

Las translaciones son vectores libres en el sólido pudiendo llevarse al punto de reducción ( $O_1$  por ejemplo) y encontrar una resultante única. Las rotaciones pueden llevarse todas al centro de reducción a condición de agregar en este un momento (translación) igual al producto vectorial de la rotación por el opuesto del vector posición correspondiente.

### **TEOREMA DE CHASLES**

"En el movimiento rototranslatorio de un sólido, un cambio de polo implica un cambio de velocidad de translación pero no de rotación"

La velocidad del punto  $P_i$  del sólido es:  $\bar{V}_i = \bar{V}_{O_1} + \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1)$

Vamos a suponer que cambiamos el polo de  $O_1$  a  $O_2$  y debido a ese cambio suponemos que  $\bar{\omega}$  cambia a  $\bar{\omega}'$ .

La velocidad del punto  $P_i$  será ahora  $\bar{V}_i = \bar{V}_{O_2} + \bar{\omega}' \wedge (P_i - O_2)$  pero  $\bar{V}_{O_2}$  referida al primitivo polo  $O_1$  es  $\bar{V}_{O_2} = \bar{V}_{O_1} + \bar{\omega} \wedge (O_2 - O_1)$  que reemplazada en la anterior y teniendo en cuenta que  $\bar{V}_i$  debe ser independiente del polo considerado, la igualdad solo se cumplirá si  $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$ .

Luego al cambiar el polo cambia la velocidad de translación pero no la de rotación.

$$\bar{V}_i = \bar{V}_{O_1} + \bar{\omega} \wedge (O_2 - O_1) + \bar{\omega}' \wedge (P_i - O_2) = \bar{V}_{O_1} + \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1)$$

### **EJE INSTANTANEO DE ROTACIÓN**

Si tomamos a  $O_1$  como centro de reducción y en él colocamos los vectores  $\bar{\omega}$  y  $\bar{V}_{O_1}$ ; podemos descomponer a  $\bar{V}_{O_1}$  en  $\bar{V}_{O_1\omega}$ , en la dirección de  $\bar{\omega}$  y  $\bar{V}_{O_1N}$  perpendicular a aquel.

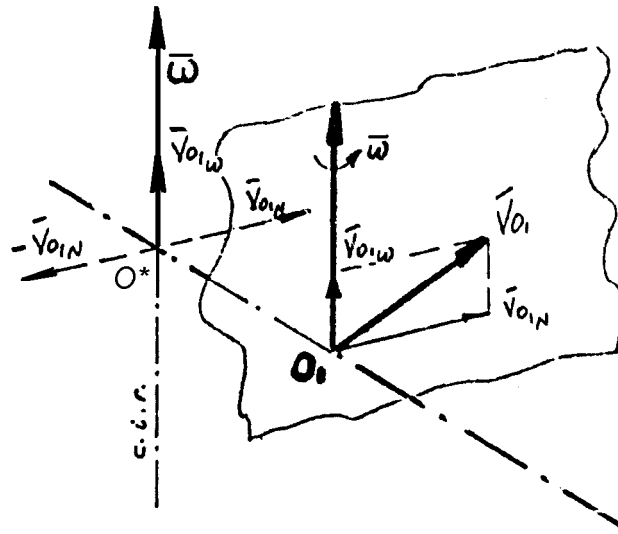
Trazando por  $O_1$  una recta perpendicular al plano formado por  $\bar{\omega}$  y  $\bar{V}_{O_1}$  que es también el plano de  $\bar{V}_{O_1\omega}$  y  $\bar{V}_{O_1N}$ ; buscamos sobre ella un punto tal como el  $O^*$  en el que  $\bar{\omega} \wedge (O^* - O_1) = -\bar{V}_{O_1N}$ .

Si se traslada ahora el centro de reducción al punto  $O^*$ , el sistema de vectores queda reducido a  $\bar{\omega}$  y  $\bar{V}_{O_1\omega}$ , coincidente con la dirección de aquel, estamos en presencia de un movimiento helicoidal instantáneo. Hemos encontrado el EJE CENTRAL de un sistema de vectores ROTACIONES Y TRANSLACIONES, donde el MOMENTO MÍNIMO que es el vector correspondiente la TRANSLACIÓN coincide con la dirección de la RESULTANTE en este caso la ROTACIÓN.

Como estamos en cinemática este eje se denomina EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN Y DE DESLIZAMIENTO MÍNIMO.

El punto  $O^*$  por donde pasa se puede obtener así:





**COMPOSICIÓN DE ROTACIONES AXIALES ALABEADAS**

Sean dos ejes que se cruzan en el espacio  $X_1$  y  $X_2$  sobre los que actúan las rotaciones  $\bar{\omega}_1$  y  $\bar{\omega}_2$  y sea  $O_1O_2$  la mínima distancia entre los ejes.

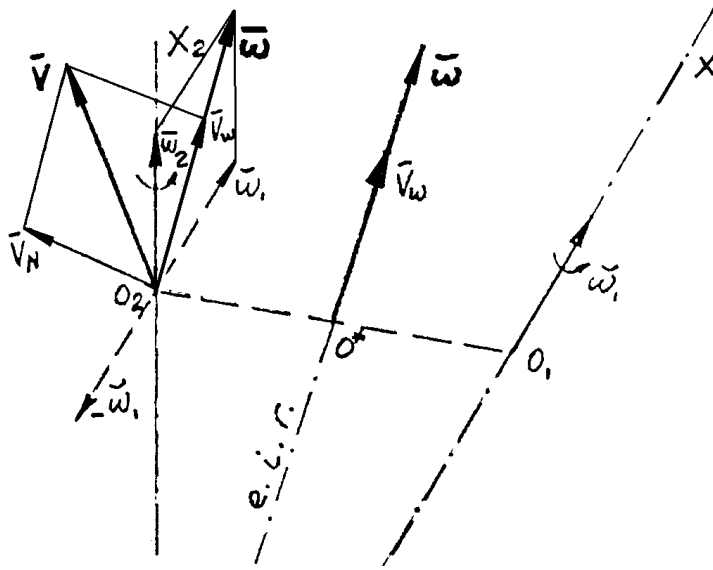
Si se elija  $O_2$  como centro de reducción, podremos llevar a el  $\bar{\omega}_1$  a condición de que agreguemos la velocidad de translación correspondiente a este cambio. En  $O_2$  el sistema queda integrado por  $\bar{\omega}_1$  y  $\bar{\omega}_2$  que se componen en  $\bar{\omega}$  y el vector  $\bar{V}$  que podemos descomponerlo en  $\bar{V}_N$  y  $\bar{V}_\omega$  normal y en la dirección de  $\bar{\omega}$  respectivamente.

Por razones geométricas todos los vectores están en un mismo plano perpendicular a la recta  $O_1O_2$ ; si buscamos sobre ella un punto  $O^*$  tal que:

$$\bar{\omega} \wedge (O^* - O_2) = -\bar{V}_N$$

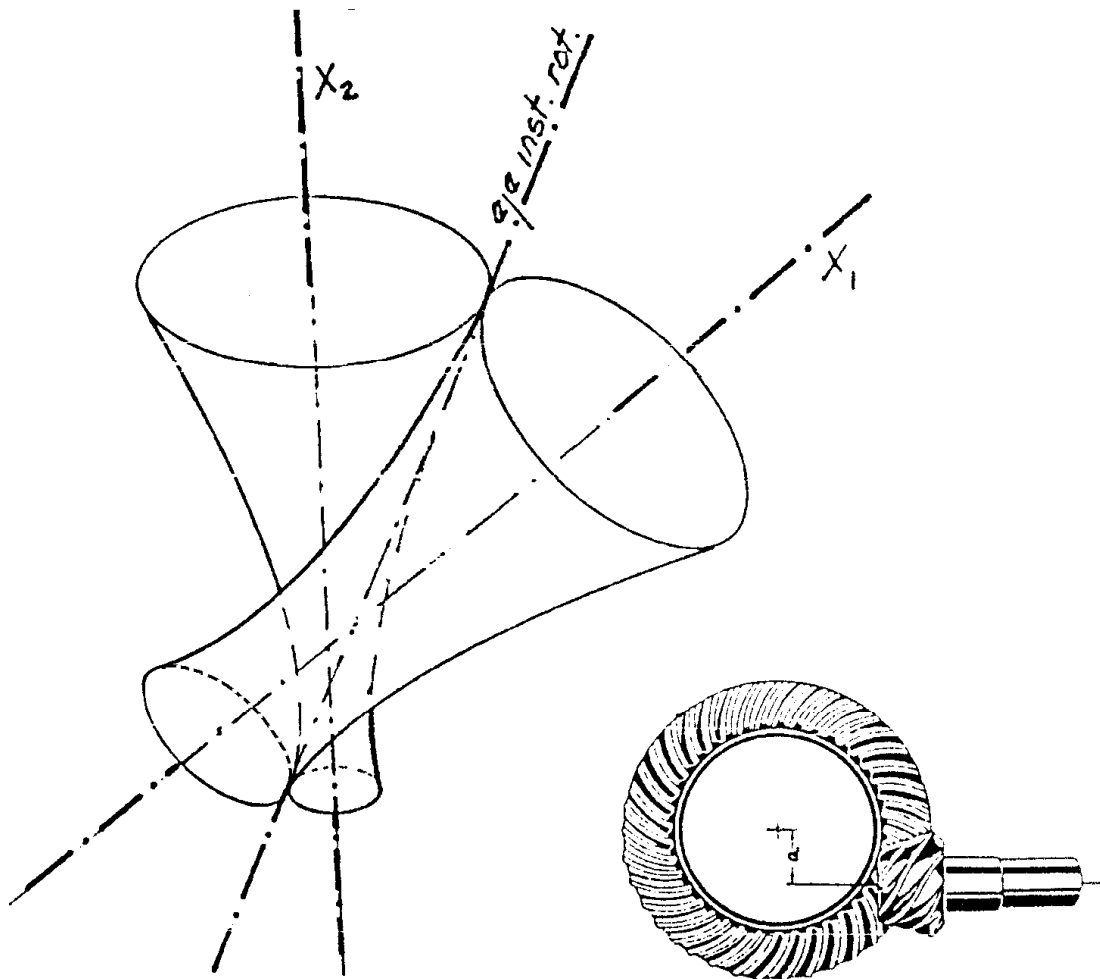
Por el pasará el EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN.

Este eje, al igual que en la composición de rotaciones axiales sobre ejes concurrentes o paralelos, al girar alrededor del eje fijo por una parte y alrededor del eje solidario con el móvil por otra, generará las superficies axoides que en caso de mantener constante la relación  $\omega_1/\omega_2$  serán hiperboloides de revolución regladas.

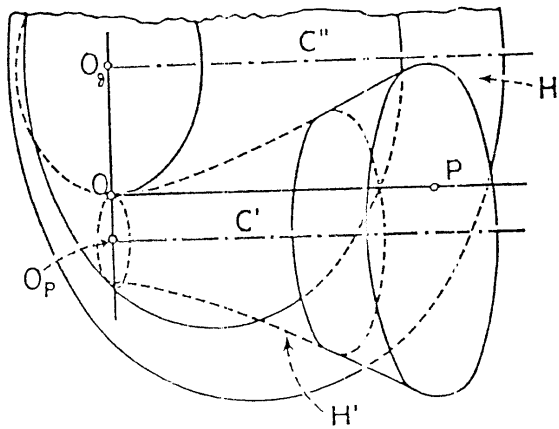


$$(O^* - O_2) = -\frac{\vec{V}_N}{\omega} = \frac{\vec{V}_N}{\omega} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{V}_N}{\omega^2}$$

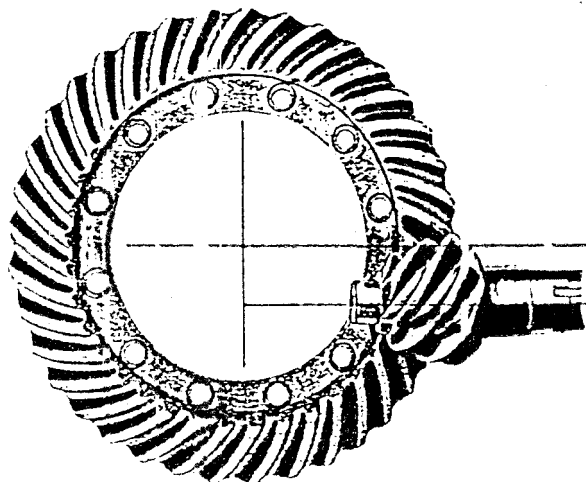
La composición de los dos movimientos se reduce a la rodadura de una superficie sobre la otra, pero acompañada ahora de un deslizamiento en la dirección de la generatriz de contacto ( $\vec{V}_\omega$ ).



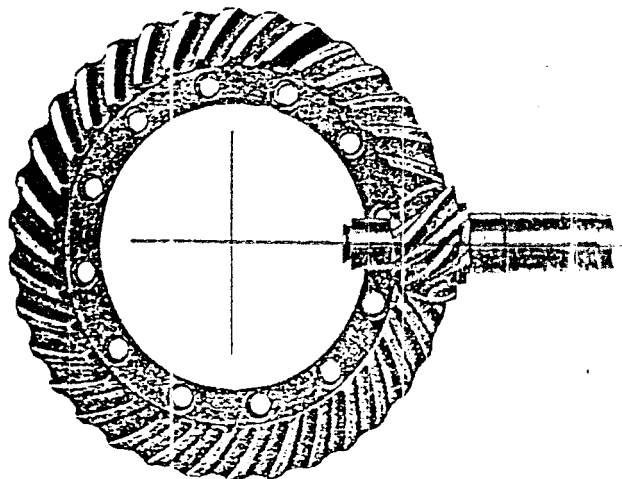
LAS AXOIDES OBTENIDAS SON LAS SUPERFICIES PRIMITIVAS DE UN PAR DE RUEDAS "HIPOIDALES"



The kinematic Pitch surfaces of hypoid gears are hyperboloids obtained by rotating the instantaneous axis  $OP$  about the axis of each gear.



Hypoid gear and pinion. Note that pinion is offset from the center line of the gear.



Spiral bevel gear and pinion. Note that the pinion is located on the center line of the gear.



## **BOLILLA N° 3**

### **CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO PLANO**

- TRANSLACIÓN PURA; ROTACIÓN PURA; MOVIMIENTO ROTOTRANSLATORIO. CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN; PROPIEDADES.
- TRAYECTORIAS POLARES; BASE Y RULETA; ECUACIONES.
- ACELERACIÓN EN EL MOVIMIENTO PLANO; CENTRÓ DE ACELERACIONES; PROPIEDADES.
- LOCALIZACIÓN DEL CENTRO DE ACELERACIONES POR EL MÉTODO DE LAS TRES CIRCUNFERENCIAS.

### **TEMAS AGREGADOS**

- VELOCIDAD DE ALTERNACIÓN DE POLO.

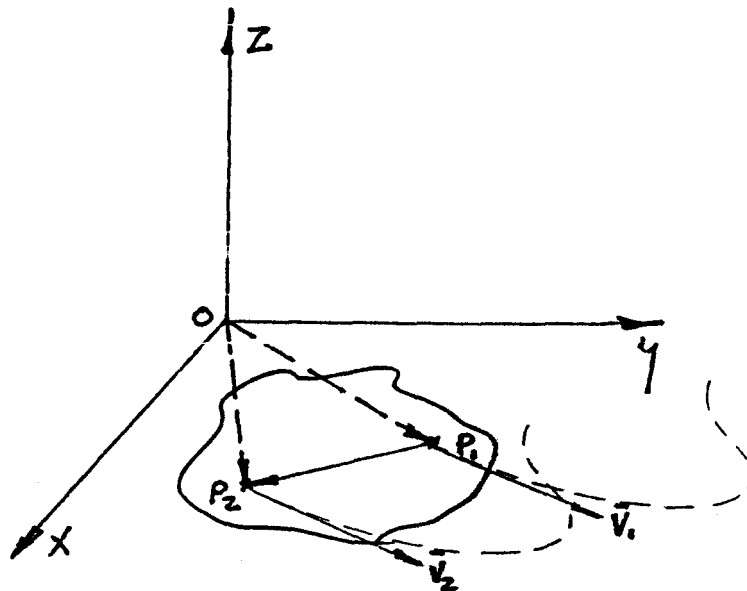


## CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO PLANO

Un cuerpo está en movimiento cuando los vectores de todos sus puntos son paralelos a un plano. En este caso para el estudio del movimiento es suficiente considerar una sección plana del cuerpo paralela al PLANO DE MOVIMIENTO, o en su defecto la proyección del cuerpo, sobre el mismo. El estudio del movimiento plano tiene importancia porque una gran cantidad de mecanismos utilizados en la técnica tienen configuración plana, es decir todos sus elementos pueden ser representados en un plano y sus movimientos se realizan en el; esto trae una gran simplificación en el estudio cinemático de tales mecanismos.

### TRANSLACION PURA

Supongamos una figura plana sobre el plano  $xy$  de una terna ortogonal, dos puntos cualesquiera de dicha figura  $P_1$  y  $P_2$  nos determinan un vector, que por estar la figura en movimiento de translación pura, debe ser constante en magnitud, dirección y sentido.



$$(P_2 - P_1) = cte$$

$$(P_2 - P_1) = (P_2 - O) - (P_1 - O)$$

$$\frac{d(P_2 - P_1)}{dt} = 0 = \frac{d(P_2 - O)}{dt} - \frac{d(P_1 - O)}{dt} = \bar{V}_2 - \bar{V}_1 \therefore \bar{V}_1 = \bar{V}_2$$

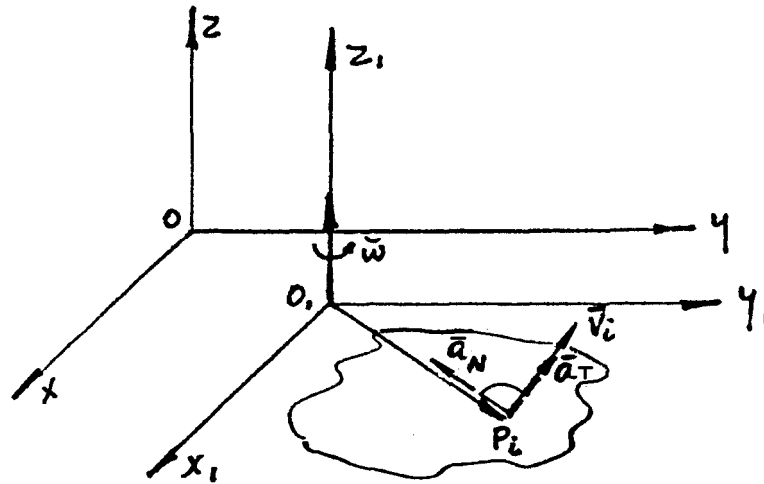
Expresión que establece que en una translación todos los puntos de la figura móvil están animados de la misma velocidad y por lo tanto describen caminos congruentes, rectilíneos o curvilíneos.



## ROTACION PURA

Consideremos la misma figura anterior, pero ahora esta puede únicamente rotar alrededor de un punto tal como el  $O_1$  por el cual hacemos pasar un sistema de referencia solidario con aquella, que quedará contenida en el plano  $x_1y_1$  coincidente con  $xy$  que es el plano de movimiento.

La rotación  $\bar{\omega}$  debe corresponder a la dirección  $z_1$  de lo contrario sacaría a la figura de su plano.



Las velocidades y las aceleraciones de los puntos de la figura se calculan como sigue:

$$\begin{aligned}\bar{V}_i &= \frac{d(P_i - O_1)}{dt} = \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1) \\ \bar{a}_i &= \frac{d\bar{V}_i}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \wedge (P_i - O_1) + \bar{\omega} \wedge \frac{d(P_i - O_1)}{dt} = \\ &= \bar{a}_\omega \wedge (P_i - O_1) + \bar{\omega} \wedge [\bar{\omega} \vee (P_i - O_1)] = \bar{a}_\omega \wedge (P_i - O_1) + \bar{\omega} [\bar{\omega} \times (P_i - O_1)] - \omega^2 (P_i - O_1) \\ \bar{\omega} \times (P_i - O_1) &= 0 \therefore \bar{a}_i = \bar{a}_\omega \wedge (P_i - O_1) - \omega^2 (P_i - O_1) = \bar{a}_T + \bar{a}_N\end{aligned}$$

## MOVIMIENTO ROTOTRANSLATORIO

Es una composición de los dos casos anteriores.

Para que el movimiento rototranslatorio sea plano debe ser:  $\bar{V}_{O_1} \perp \bar{\omega}$

$$\begin{aligned}\bar{V}_i &= \bar{V}_{O_1} + \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1) \\ \bar{a}_i &= \bar{a}_{O_1} + \bar{a}_T + \bar{a}_N\end{aligned}$$

## CENTRO INSTANTANEO DE ROTACIÓN

La velocidad de un punto cualquiera en movimiento plano es:

$$\bar{V}_i = \bar{V}_{O_1} + \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1)$$



Vamos a suponer que existe un punto tal como el  $C$  en el cual sin ser nulos ni  $\bar{V}_{O_1}$  ni  $\bar{\omega}$  la velocidad instantánea en el sea nula

$$\bar{V}_C = \bar{V}_{O_1} + \bar{\omega} \wedge (C - O_1) = 0$$

Si se puede obtener un punto como ese, en un instante se puede suponer al móvil como realizando una rotación pura alrededor de el, es el CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACION. Su vector posición podemos determinarlo como sigue:

$$\bar{V}_{O_1} + \bar{\omega} \wedge (C - O_1) = 0$$

$$\bar{\omega} \wedge (C - O_1) = -\bar{V}_{O_1}$$

$$(C - O_1) = \frac{\bar{V}_{O_1}}{\bar{\omega}} = \frac{\bar{\omega} \wedge \bar{V}_{O_1}}{\omega^2} = \frac{\bar{k} \wedge \bar{V}_{O_1}}{\omega} \therefore \bar{\omega} = \bar{k} \cdot \omega$$

Si  $\bar{\omega} = 0$ ,  $C$  está en el infinito y si  $\bar{V}_{O_1} = 0$ ,  $C$  coincide con  $O_1$ .

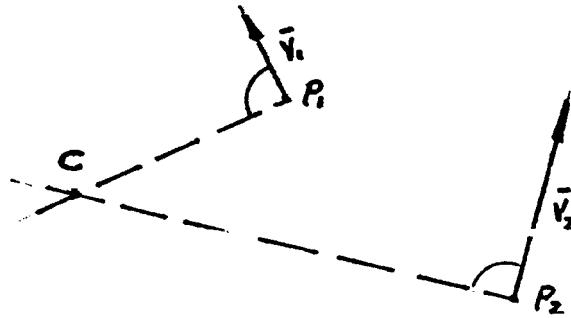
La velocidad de un punto cualquiera puede calcularse en un instante, siendo  $C$  el c. i. de r.

$$\begin{array}{l} \bar{V}_i = \bar{V}_{O_1} + \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1) \\ \bar{V}_C = \bar{V}_{O_1} + \bar{\omega} \wedge (C - O_1) = 0 \\ \hline \bar{V}_i = \bar{\omega} \wedge (P_i - C) \end{array}$$

Rest. m.a.m

Que es la velocidad correspondiente a una rotación pura alrededor de  $C$ .

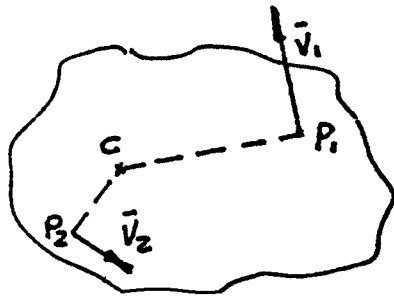
Si se conocen en un instante las velocidades simultáneas de dos puntos de la figura móvil, el centro instantáneo de rotación se determina de inmediato:



Basta trazar las perpendiculares en los puntos a las velocidades conocidas y en su intersección se encuentra  $C$ .

### PROPIEDADES DEL CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN

Por haberse asimilado el movimiento de una figura en movimiento plano a una rotación pura alrededor del c.i.r. en cada instante, los vectores velocidad de los puntos de la figura serán, también en cada instante, perpendiculares a los vectores posición de dichos puntos tomando a  $C$  como origen, esto permite determinar la dirección de la velocidad, su sentido será el que le corresponde a la rotación y su módulo de acuerdo a las siguientes relaciones proporcional a la distancia, del punto considerado, al centro instantáneo de rotación.



$$\bar{V}_1 = \bar{\omega} \wedge (P_1 - C)$$

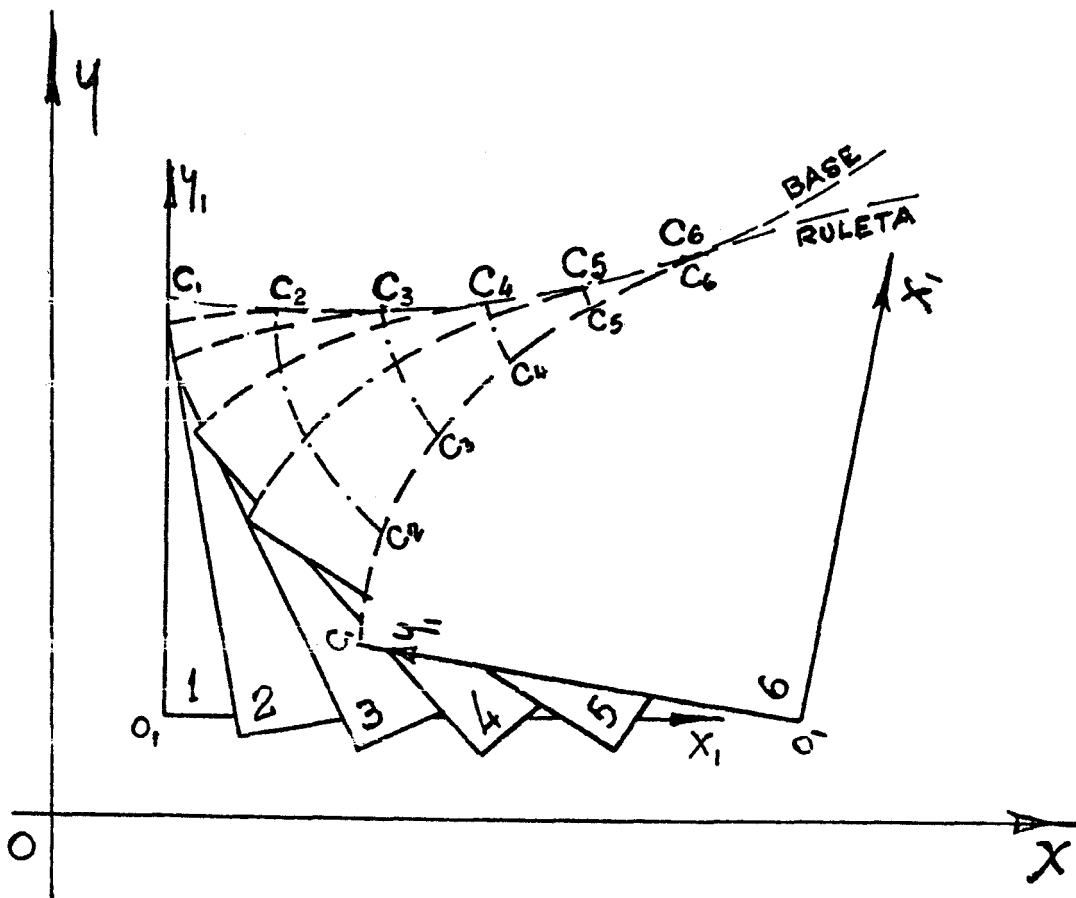
$$\bar{V}_2 = \bar{\omega} \wedge (P_2 - C)$$

$$\frac{|\bar{V}_1|}{|\bar{V}_2|} = \frac{|P_1 - C|}{|P_2 - C|}$$

**TRAYECTORIAS POLARES**

.Las sucesivas posiciones del Centro Instantáneo de Rotación sobre el plano móvil dan origen a una curva, la RULETA; esos mismos puntos pero tomados como pertenecientes al plano fijo determinan otra curva, la BASE.

Durante el movimiento la ruleta rueda sin resbalar sobre la base y el punto de contacto es el centro de rotación que corresponde a ese instante. En la figura siguiente se ha representado en una secuencia de seis instantes el movimiento de una figura materializada por las mismas coordenadas móviles. Se observa como el punto C en su continuo desplazamiento va generando la base en el plano xy y la ruleta en el plano x1y1.







### Miscelánea

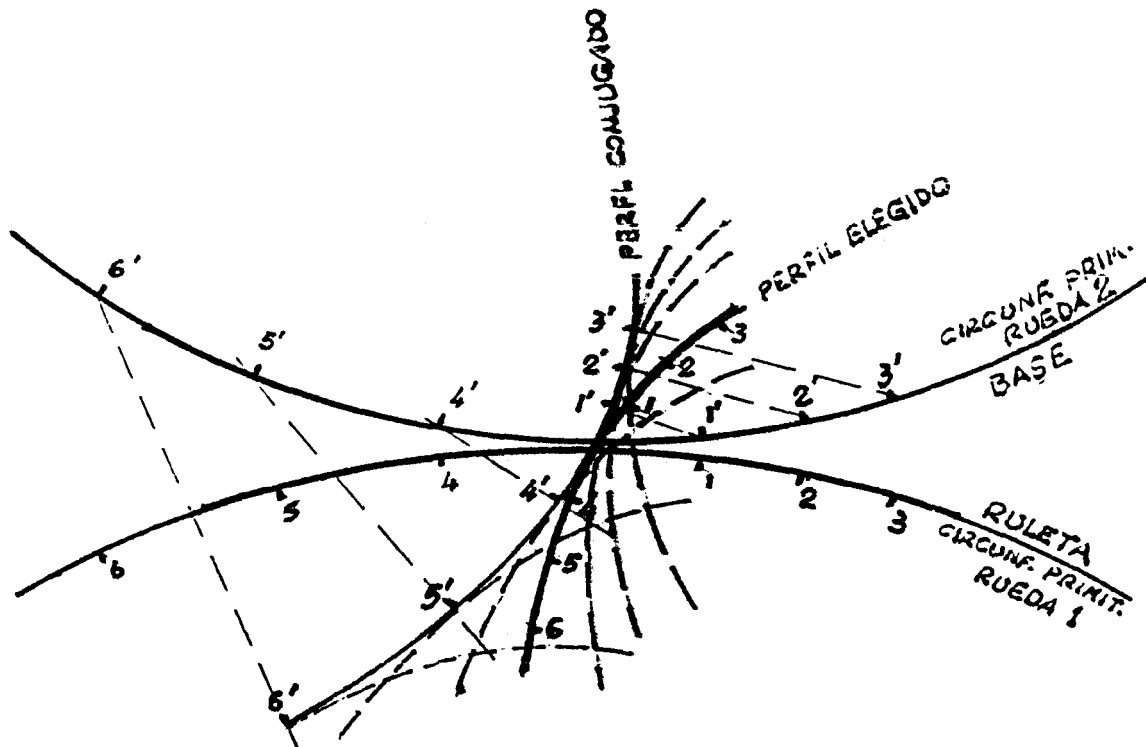
En un juego de ruedas dentadas las circunferencias primitivas de las mismas cumplen la función de base y ruleta del movimiento y el punto de contacto de las mismas es en todo momento el centro instantáneo de rotación.

Cuando una curva plana rueda sin resbalar sobre otra, las normales a las trayectorias de todos los puntos en movimiento plano pasan por  $C$ , esta propiedad nos permite adoptar una curva cualquiera como perfil del diente de una rueda dentada, el perfil de la otra rueda, perfil conjugado, se obtendría como la envolvente de las sucesivas posiciones de la curva elegida en su movimiento solidario con la primera de las ruedas.

El perfil elegido y el conjugado así obtenido, cumplen con el teorema general de las ruedas dentadas, es decir " La normal común a los dos perfiles en su punto de contacto debe pasar siempre por el punto de tangencia de las dos circunferencias primitivas" (centro instantáneo de rotación) para que la transmisión del movimiento sea siempre uniforme sin que se produzcan golpes.

El movimiento de rodadura sin resbalamiento de una circunferencia primitiva sobre la otra, cinemáticamente puede remplazarse como el rodamiento, pero ahora con resbalamiento, del perfil elegido sobre el conjugado.

En la figura puede observarse el resbalamiento comparando los tramos de perfil entre puntos de contacto de una y otra rueda, cuya diferencia aumenta a medida que se alejan del centro instantáneo de rotación. En la práctica, modernamente, solo se utilizan dos tipos de curvas como perfiles de los dientes, las de envolvente de la circunferencia y las curvas cicloidales.

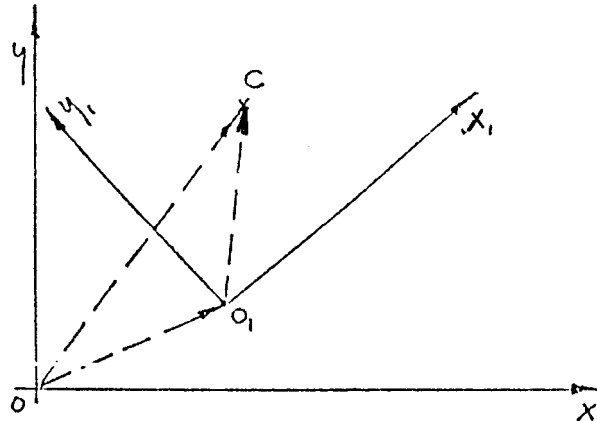




### VELOCIDAD DE ALTERNACIÓN DE POLO

Para que la RULETA ruede sin resbalar sobre la BASE, la velocidad con que se traslada  $C$  sobre la base (Velocidad absoluta) debe ser igual a la velocidad con que el mismo punto lo hace sobre la ruleta (Velocidad relativa).

El vector posición de  $C$  referido al sistema móvil es:  $(C - O_1) = \frac{\bar{\omega} \wedge \bar{V}_{O_1}}{\omega^2} = \frac{\bar{k} \wedge \bar{V}_{O_1}}{\omega}$



Y el vector posición del mismo punto pero referido al sistema fijo es:

$$(C - O) = (C - O_1) + (O_1 - O)$$

La velocidad absoluta de  $C$  la determinamos derivando la ecuación anterior:

$$\bar{V}_{abC} = \frac{d(C - O)}{dt} = \frac{d(C - O_1)}{dt} + \frac{d(O_1 - O)}{dt}$$

Que de acuerdo a lo visto en Movimiento Relativo resulta:

$$\bar{V}_{abC} = \left[ \frac{d(C - O_1)}{dt} \right]_1 + \bar{\omega} \wedge (C - O_1) + \bar{V}_{O_1} = \bar{V}_{rC} + \bar{\omega} \wedge \frac{\bar{k} \wedge \bar{V}_{O_1}}{\omega} + \bar{V}_{O_1}$$

Desarrollando el segundo sumando resulta:

$$\bar{\omega} \wedge \frac{\bar{k} \wedge \bar{V}_{O_1}}{\omega} = \frac{\bar{k}(\bar{\omega} \times \bar{V}_{O_1}) - \bar{V}_{O_1}(\bar{k} \times \bar{\omega})}{\omega} = -\bar{V}_{O_1}$$

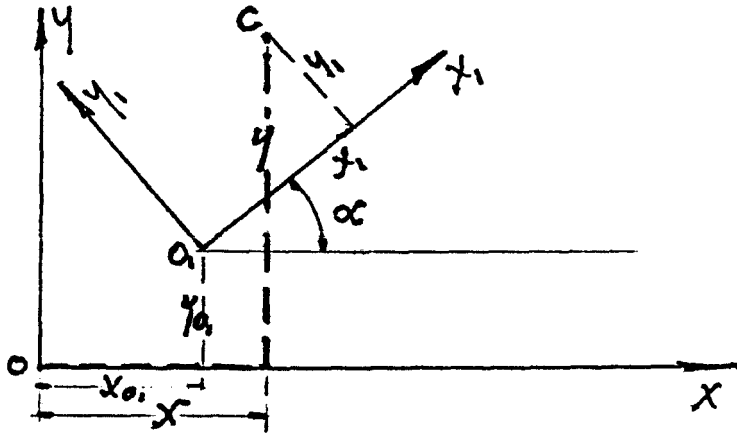
Ya que:  $\bar{\omega} \times \bar{V}_{O_1} = 0$  por ser:  $\bar{\omega} \perp \bar{V}_{O_1}$  y  $\bar{k} \times \bar{\omega} = \omega$

Luego:  $\bar{V}_{abC} = \bar{V}_{rC} - \bar{V}_{O_1} + \bar{V}_{O_1} = \bar{V}_{rC} \Rightarrow \bar{V}_{abC} = \bar{V}_{rC}$



**ECUACIÓN DE LA BASE**

Si  $C$  es el centro instantáneo de rotación, sus coordenadas referidas a la terna fija serán:



$$x = x_{o1} + x_1 \cdot \cos \alpha - y_1 \cdot \text{sen} \alpha$$

$$y = y_{o1} + x_1 \cdot \text{sen} \alpha + y_1 \cdot \cos \alpha$$

Derivando respecto al tiempo y teniendo en cuenta que la velocidad de  $C$  debe ser cero:

$$\frac{dx}{dt} = 0 = V_{Cx} = V_{o1x} - x_1 \cdot \omega \cdot \text{sen} \alpha - y_1 \cdot \omega \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 = V_{Cy} = V_{o1y} + x_1 \cdot \omega \cdot \cos \alpha - y_1 \cdot \omega \cdot \text{sen} \alpha$$

$$V_{o1x} = \omega(x_1 \cdot \text{sen} \alpha + y_1 \cdot \cos \alpha) = \omega(y - y_{o1})$$

$$V_{o1y} = \omega(-x_1 \cdot \cos \alpha + y_1 \cdot \text{sen} \alpha) = -\omega(x - x_{o1})$$

De donde se obtienen como coordenadas de los puntos de la base las siguientes expresiones:

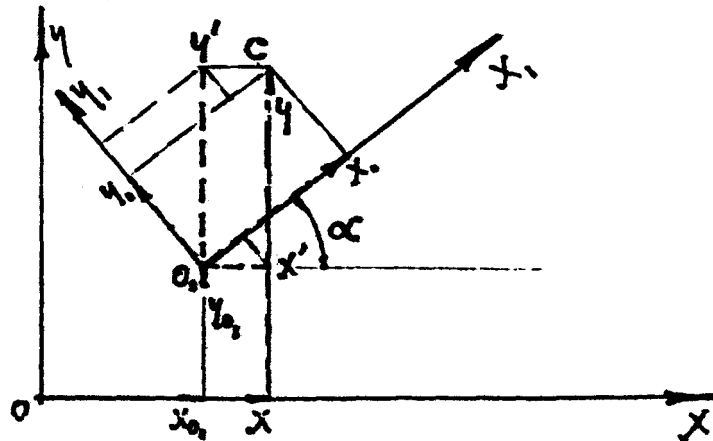
$$y = \frac{V_{o1x}}{\omega} + y_{o1}$$

$$x = -\frac{V_{o1y}}{\omega} + x_{o1}$$

**ECUACIÓN DE LA RULETA**

Las coordenadas de las sucesivas posiciones de  $C$  pero referidas ahora a los ejes móviles se determinan a continuación:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - x_{o1} = -\frac{V_{o1y}}{\omega} + x_{o1} - x_{o1} = -\frac{V_{o1y}}{\omega} \\ y' &= y - y_{o1} = -\frac{V_{o1x}}{\omega} + y_{o1} - y_{o1} = -\frac{V_{o1x}}{\omega} \end{aligned} \right\} \text{De la ecuación de la base}$$



$$x_1 = x' \cdot \cos \alpha + y' \cdot \text{sen} \alpha$$

$$y_1 = y' \cdot \cos \alpha - x' \cdot \text{sen} \alpha$$

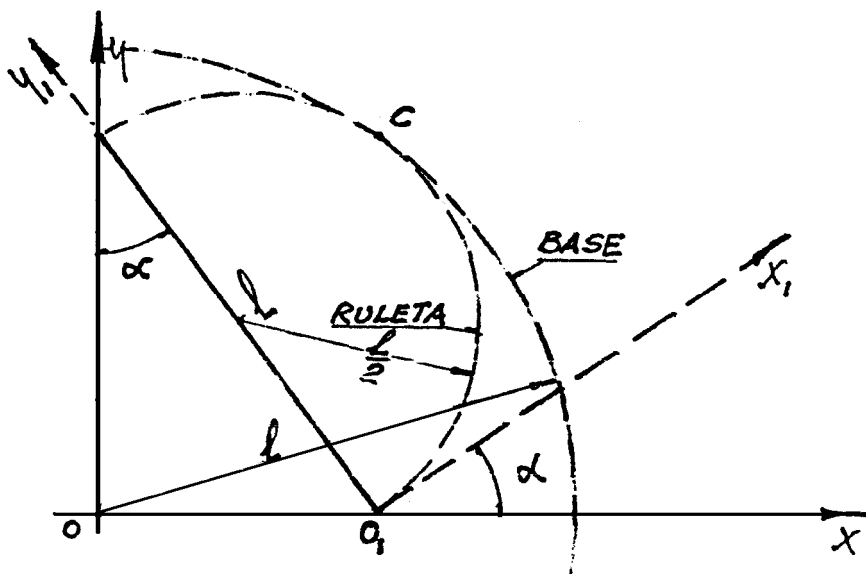
$$x_1 = -\frac{V_{O1y}}{\omega} \cdot \cos \alpha + \frac{V_{O1x}}{\omega} \cdot \text{sen} \alpha$$

$$y_1 = \frac{V_{O1x}}{\omega} \cdot \cos \alpha + \frac{V_{O1y}}{\omega} \cdot \text{sen} \alpha$$

Que son las ecuaciones buscadas.

**Ejemplo:**

Supongamos que queremos encontrar la base y la ruleta del movimiento de una escalera que apoyada sobre la pared con un extremo, desliza el otro sobre el piso. Tomamos los ejes móviles, de tal manera que  $O_1$  es el extremo de la escalera que está sobre el piso,  $y_1$  en la dirección de la escalera y  $x_1$  perpendicular al anterior. La longitud de la escalera es  $l$  y el ángulo que esta forma con la pared en un instante cualquiera es  $\alpha$ .





$$y_{O_1} = 0 \therefore V_{O_1y} = 0; \quad x_{O_1} = l \cdot \operatorname{sen} \alpha \therefore V_{O_1x} = l \cdot \omega \cdot \cos \alpha$$

$$\text{RULETA: } \left. \begin{array}{l} x_1 = l \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \\ y_1 = l \cdot \cos^2 \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2 = l^2 (\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) = l^2 \cdot \cos^2 \alpha = l \cdot y_1 \\ x_1^2 + y_1^2 = l \cdot y_1 \end{array}$$

Ecuación de una circunferencia de radio  $\frac{l}{2}$  con centro sobre el eje  $y_1$  a distancia  $\frac{l}{2}$  del origen.

$$\text{BASE: } \left. \begin{array}{l} y = \frac{V_{O_1x}}{\omega} + y_{O_1} = l \cdot \cos \alpha \\ x = \frac{V_{O_1y}}{\omega} + x_{O_1} = l \cdot \operatorname{sen} \alpha \end{array} \right\} x^2 + y^2 = l^2$$

Circunferencia de radio  $l$  y centro en  $O$ .

### ACELERACIÓN EN EL MOVIMIENTO PLANO

Siendo:  $\bar{V}_i = \bar{V}_{O_1} + \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1)$

Derivando respecto al tiempo se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{a}_i &= \bar{a}_{O_1} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \wedge (P_i - O_1) + \bar{\omega} \wedge [\bar{\omega} \wedge (P_i - O_1)] \\ \bar{a}_i &= \bar{a}_{O_1} + \bar{a}_{\omega} \wedge (P_i - O_1) - \omega^2 (P_i - O_1) \end{aligned}$$

Busquemos un punto  $C_a$  tal que no siendo nulas  $\bar{a}_{\omega}$  ni  $\bar{\omega}$  sea nula la aceleración total

$$\bar{a}_{C_a} = 0 = \bar{a}_{O_1} + \bar{a}_{\omega} \wedge (C_a - O_1) - \omega^2 (C_a - O_1) \quad (1)$$

Multiplicando esta expresión vectorialmente por  $\bar{a}_{\omega}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\omega} \wedge \bar{a}_{C_a} = 0 &= \bar{a}_{\omega} \wedge \bar{a}_{O_1} + \bar{a}_{\omega} \wedge [\bar{a}_{\omega} \wedge (C_a - O_1)] - \bar{a}_{\omega} \wedge \omega^2 (C_a - O_1) \\ 0 &= \bar{a}_{\omega} \wedge \bar{a}_{O_1} - a_{\omega}^2 (C_a - O_1) - \omega^2 \bar{a}_{\omega} \wedge (C_a - O_1) \quad (2) \end{aligned}$$

Multiplicando (1) por  $\omega^2$ :

$$\omega^2 \bar{a}_{C_a} = 0 = \omega^2 \bar{a}_{O_1} + \omega_2 \bar{a}_{\omega} \wedge (C_a - O_1) - \omega^4 (C_a - O_1) \quad (3)$$

Sumando las expresiones (2) y (3):

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{a}_{\omega} \wedge \bar{a}_{O_1} - (C_a - O_1) (a_{\omega}^2 + \omega^4) + \omega^2 \bar{a}_{O_1} \\ \therefore (C_a - O_1) &= \frac{\bar{a}_{\omega} \wedge \bar{a}_{O_1} + \omega^2 \bar{a}_{O_1}}{a_{\omega}^2 + \omega^4} \end{aligned}$$

Fórmula que nos permite ubicar el punto  $C_a$  en que la aceleración es nula.



La aceleración para un punto cualquiera  $P_i$  es:

$$\bar{a}_i = \bar{a}_{O_1} + \bar{a}_\omega \wedge (P_i - O_1) - \omega^2 (P_i - O_1)$$

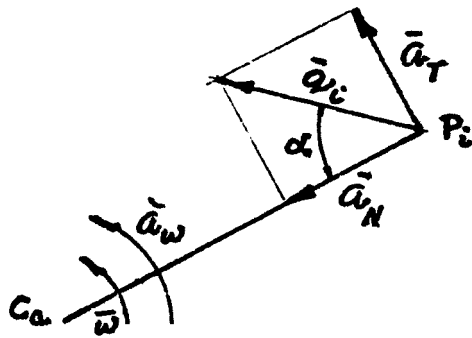
Para  $C_a$ :

$$\bar{a}_{C_a} = 0 = \bar{a}_{O_1} + \bar{a}_\omega \wedge (C_a - O_1) - \omega^2 (C_a - O_1)$$

Restando miembro a miembro se tiene:

$$\bar{a}_i = \bar{a}_\omega \wedge (P_i - C_a) - \omega^2 (P_i - C_a)$$

Que equivale a la aceleración de una rotación pura instantánea alrededor de  $C_a$ .



$$\bar{a}_T = \bar{a}_\omega \wedge (P_i - C_a)$$

$$\bar{a}_N = -\omega^2 (P_i - C_a)$$

### PROPIEDADES DEL CENTRO DE ACELERACIONES

El ángulo  $\alpha$  que forma el vector aceleración de un punto cualquiera de la figura móvil con la dirección del vector posición del mismo respecto a  $C_a$ , podemos calcularlo en función de su tangente trigonométrica.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\bar{a}_T|}{|\bar{a}_N|} = \frac{|\bar{a}_\omega|}{\omega^2} = \operatorname{cte}$$

Que por ser constante, resulta que  $\alpha$  es igual para todos los puntos de la figura móvil en ese instante.

Si se toman dos puntos  $A$  y  $B$  del móvil, los módulos de sus aceleraciones serán respectivamente:

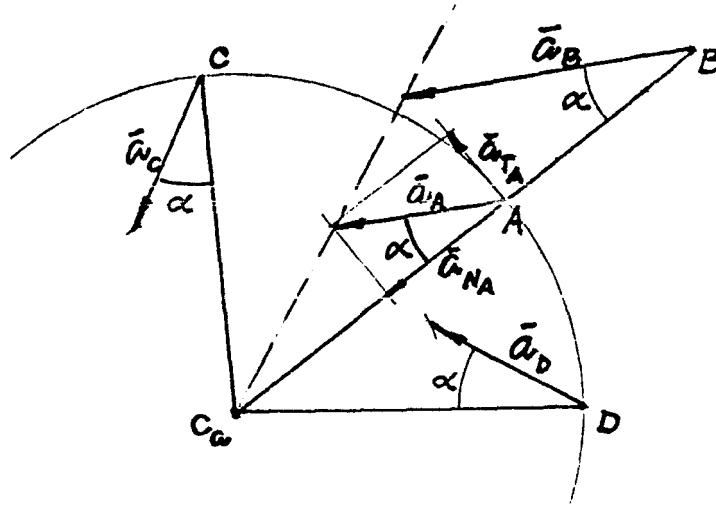
$$|\bar{a}_A| = |\bar{a}_\omega \wedge (A - C_a) - \omega^2 (A - C_a)| = |A - C_a| \sqrt{a_\omega^2 + \omega^4}$$

$$|\bar{a}_B| = |\bar{a}_\omega \wedge (B - C_a) - \omega^2 (B - C_a)| = |B - C_a| \sqrt{a_\omega^2 + \omega^4}$$

Dividiendo miembro a miembro se obtiene:  $\frac{|\bar{a}_A|}{|\bar{a}_B|} = \frac{|A - C_a|}{|B - C_a|}$



Luego, los módulos de las aceleraciones son proporcionales en cada instante a las distancias a  $C_a$ .



### LOCALIZACIÓN DEL CENTRO DE ACELERACIONES

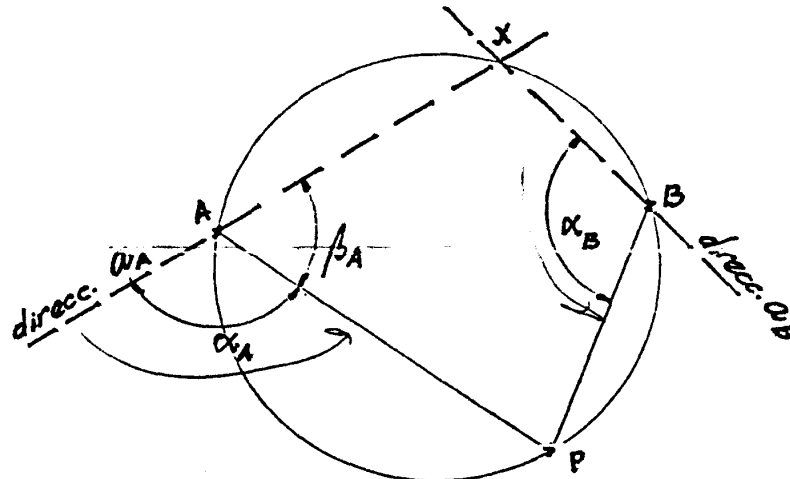
Si se conocen las direcciones de las aceleraciones en dos puntos  $A$  y  $B$  encontramos la intersección de ambas en  $X$ ; la circunferencia que pasa por los tres puntos  $(A, B, X)$  pasa también por  $C_a$ .

Tomemos un punto sobre la circunferencia,  $P$  por ejemplo; si unimos  $P$  con  $A$  y  $P$  con  $B$ , se obtiene un cuadrilátero inscrito, sus ángulos opuestos son suplementarios.

$$\beta_A + \alpha_B = 180^\circ; (180^\circ - \alpha_A) + \alpha_B = 180^\circ \therefore \alpha_B = \alpha_A$$

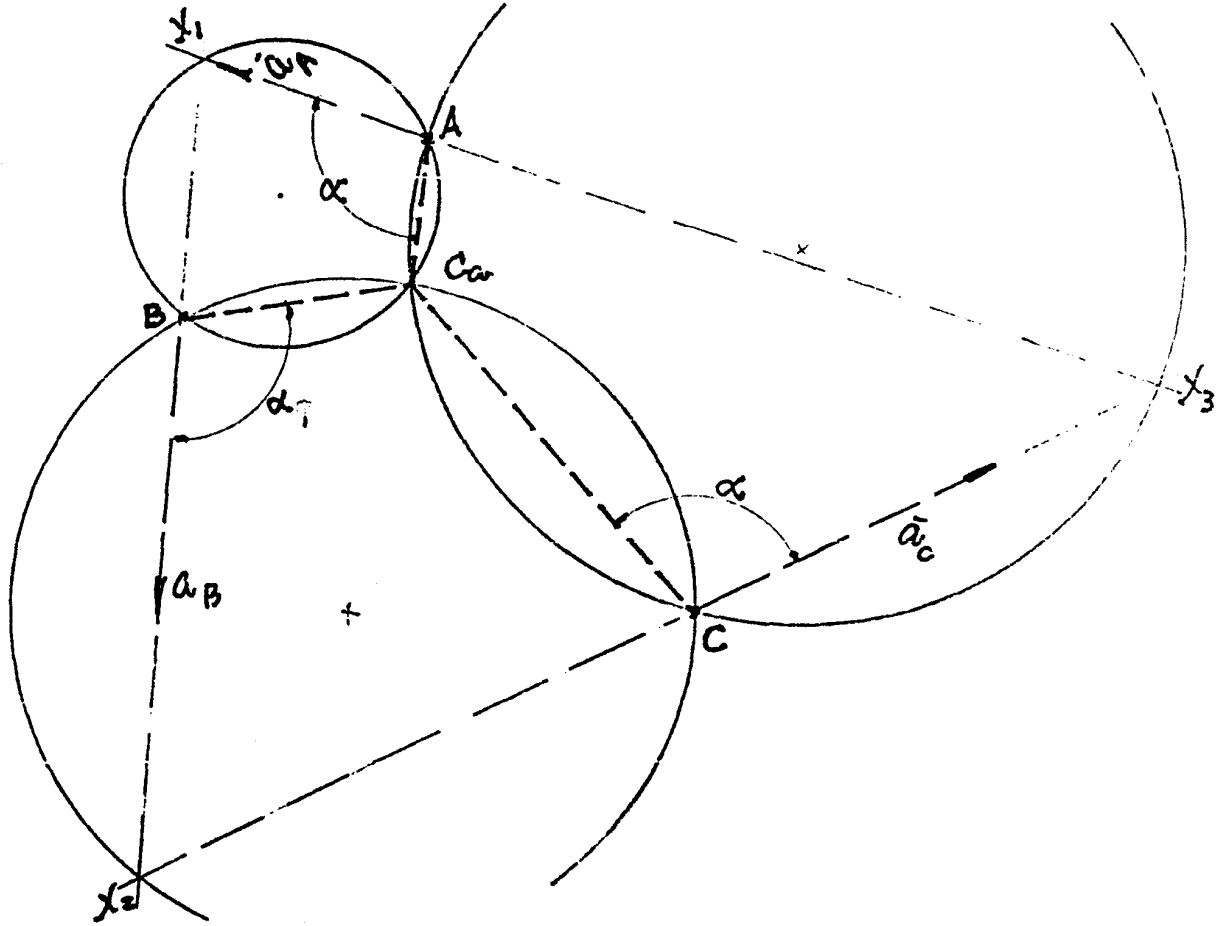
Que es una de las condiciones que debe cumplir  $C_a$ .

Cualquier punto de la circunferencia trazada cumple con esta propiedad; propiedad que nos permite localizar el  $C_a$  cuando se conocen las direcciones de la aceleración de tres puntos de la figura en movimiento plano.





Haciendo una construcción similar, tomando los puntos de dos en dos, se obtendrán tres circunferencias que se intersectan en un punto que es  $C_a$ .







## BOLILLA N ° 4

### **CINEMÁTICA DE LOS MECANISMOS**

- CADENA CINEMÁTICA; DETERMINACIÓN DE LOS CENTROS; TEOREMA DE KENNEDY.
- GRADOS DE LIBERTAD; MECANISMO DESMODRÓMICO; EXPRESIÓN DE CHUBISHEV.
- TEOREMA GENERAL DE LAS RUEDAS DENTADAS; PERFILADO DE LOS DIENTES DE ENGRANAJES; DIENTES CICLOIDALES Y DE EVOLVENTES.
- TRENES DE ENGRANAJES: TRENES EPICICLOIDALES, FÓRMULA DE WILLIS, MÉTODO TABULAR.
- MECANISMO BIELA MANIVELA, DETERMINACIÓN DE ESPACIOS, VELOCIDADES Y ACELERACIONES DEL PIE DE BIELA.
- MECANISMO DE LEVAS: LEVA PARABÓLICA, DETERMINACIÓN DE ALZADAS, VELOCIDADES, ACELERACIONES Y PULSO DEL SEGUIDOR; TRAZADO DE LA LEVA. DESCRIPCIÓN DE OTROS TIPOS DE LEVAS.

### **TEMAS AGREGADOS**

- RELACIÓN ENTRE LAS VELOCIDADES ANGULARES Y LOS CENTROS DETERMINADOS POR EL TEOREMA DE KENNEDY.
- IMAGEN DE VELOCIDADES E IMAGEN DE ACELERACIONES.
- APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES A LA DETERMINACIÓN DEL EQUILIBRIO DE LOS MECANISMOS.
- JUNTA CARDAN (HOOKE).



## CINEMÁTICA DE MECANISMOS

### Cadena cinemática:

Cadena es un conjunto de cuerpos acoplados de tal manera que cada uno de ellos puede tener movimientos relativos respecto a sus vecinos.

La CADENA CINEMÁTICA es una cadena en la que el movimiento relativo de dos cualesquiera de sus cuerpos determina el movimiento de todos los demás, siendo estos últimos completamente obligados.

Dos cuerpos o ELEMENTOS o BARRAS de una cadena cinemática que están en contacto y entre los cuales existe movimiento relativo, constituye un PAR.

Un par debe permitir el movimiento relativo que se desea, los más frecuentes son los de deslizamiento (colisa y corredera), rotación (buje y perno), helicoidal (tuerca y tornillo), etc., estos son conocidos como pares elementales o inferiores (tienen una superficie de contacto).

Pares superiores son aquellos en los que existe una línea de contacto, por ejemplo engranajes, levas etc.

Par de cierre propio es cuando la conexión solo permite el movimiento deseado y par de cierre forzado es cuando el contacto se mantiene por acción de fuerzas externas (resortes por ejemplo).

Cuando uno de los órganos de la cadena cinemática está fijo a manera de bancada o bastidor, la cadena se convierte en un mecanismo.

Como cualquier órgano de una cadena cinemática puede ser fijado, podemos obtener tantos mecanismos como órganos posea la cadena, aunque alguno de ellos pueden resultar semejantes.

Este modo de obtener mecanismos diferentes inmovilizando por turno los diversos órganos de una cadena cinemática, se denomina INVERSIÓN.

Nos ocuparemos solo de los mecanismos cuyos movimientos ocurren en un plano o pueden representarse en el y son desmodrómicos es decir, a cada posición de un elemento corresponde una única posición de todos los demás.

Un centro o nudo es un punto común a dos cuerpos, alrededor del cual tiende a girar uno respecto del otro, este punto puede estar situado realmente en los cuerpos (es el centro geométrico del par) y ser por lo tanto un centro permanente o bien situado en el espacio y ser un centro instantáneo.

El número de centros de un mecanismo es el número de combinaciones posibles de los órganos que lo forman tomados de dos en dos.

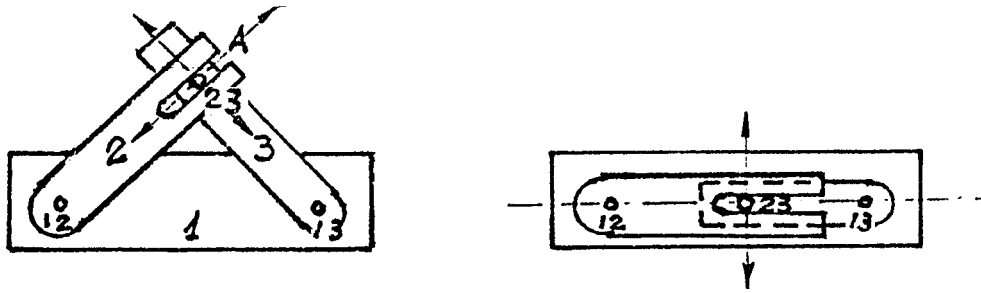
$$n = \frac{N(N-1)}{2} \therefore (N = \text{número de elementos})$$

Los centros se localizan de dos maneras:

1. por observación
2. por el teorema de Kennedy o de los tres centros.

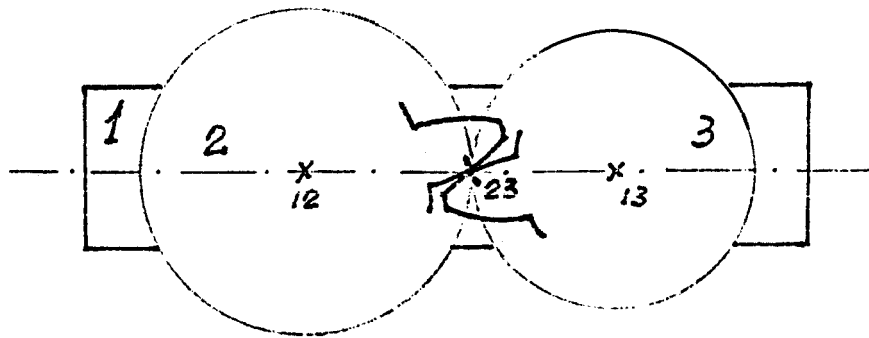
### TEOREMA DE KENNEDY

Tres cuerpos cualesquiera que tengan un movimiento plano, uno con relación a los otros dos, tienen solamente tres centros que caen sobre una misma línea recta.



Las articulaciones 1 2 y 1 3 son centros permanentes, el tercer centro debe pertenecer simultáneamente a los cuerpos 2 y 3; supongamos que se encuentra en A, la velocidad del mismo como perteneciente al cuerpo 2 tiene distinta dirección que si lo consideramos perteneciente al cuerpo 3, para que ambos vectores tengan la misma dirección el centro 2 3 debe situarse sobre la recta 1 2 - 1 3.

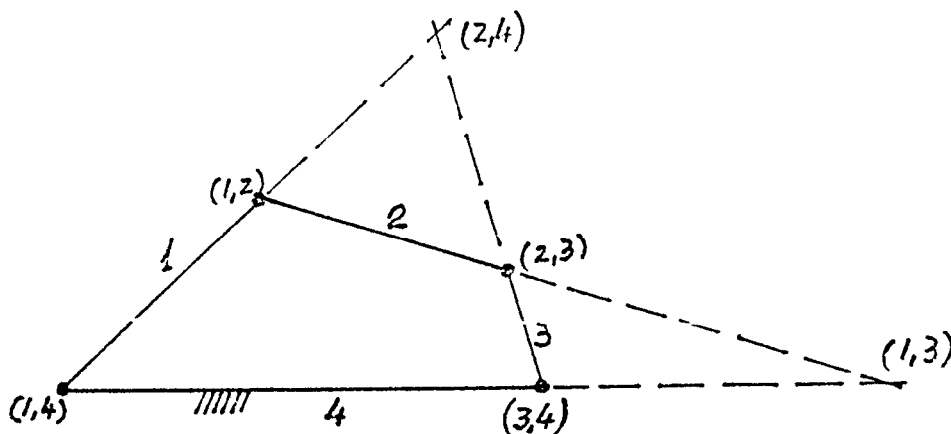
El problema se visualiza perfectamente considerando un par de ruedas dentadas.



**Ejemplo 1**

Sea el mecanismo de cuatro barras do la figura del cual se quieren determinar los centros. El número de centros será  $n = \frac{N(N-1)}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$  centros.

Cuatro de los centros los determinamos de inmediato POR OBSERVACIÓN, son los centros geométricos de las articulaciones (o pares) de los elementos 1, 2; 2, 3; 3, 4 y 1, 4; los otros dos centros faltantes se determinan aplicando el TEOREMA DE KENNEDY.





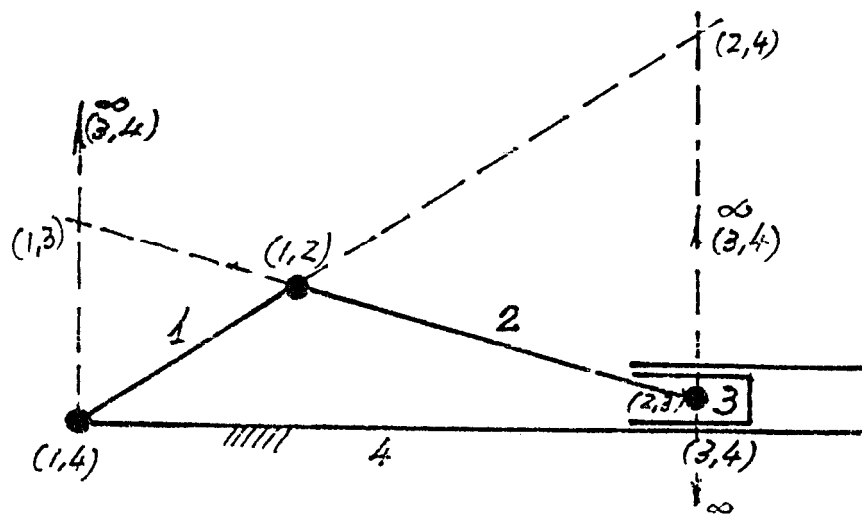
Determinación del centro 2, 4; tomemos la combinación de las barras 4, 1 y 2, de acuerdo con el teorema de Kennedy estas tres barras pueden tener solamente tres centros y ellos deben estar alineados, dos los visualizamos de inmediato son el 1, 4 y el 1, 2; el tercero debe estar alineado con los otros dos, estará en la dirección de la barra 1.

Si se toman ahora los elementos 2, 3 y 4 razonando de la misma manera el centro 2, 4 debe estar en la dirección de la barra 3. Luego el centro 2, 4 se encontrará en la intersección de las prolongaciones de las barras 1 y 3.

De igual manera se determina el centro 1, 3.

### Ejemplo 2

Mecanismo biela manivela. Es una variante del mecanismo de cuatro barras, el par de rotación entre los elementos 3 y 4 se ha remplazado por un par de deslizamiento cuyo centro geométrico podemos considerarlo en el infinito en la dirección normal al desplazamiento de ambos elementos. Por lo demás el procedimiento es idéntico al ejemplo anterior.





## **GRADOS DE LIBERTAD**

Los mecanismos para poder funcionar como tal deben tener un solo grado de libertad, esto es necesario para que el movimiento de uno cualquiera de sus elementos de origen al movimiento de todos los demás y esto sea completamente obligado; es decir, a cada posición del elemento motor debe corresponder solo una posición de los elementos vinculados.

Se dijo que para convertir una cadena cinemática en un mecanismo era suficiente fijar uno de sus elementos, los demás elementos tienen en principio 3 grados de libertad cada uno (en el plano) los que se ven restringidos por sus vínculos con los demás; estos vínculos están materializados por los pares ya estudiados; un par inferior se puede determinar en el plano por dos coordenadas, las que ubican el centro del par; un par superior tendrá un centro, de acuerdo con el teorema de Kennedy, alineado con los centros de los pares inferiores contiguos, esto es, hace falta solo la distancia a uno de ellos para determinarlo. (Ver apéndice en los apuntes del presente capítulo).

En cuanto a lo dicho, los grados de libertad de un mecanismo se pueden, calcular de la siguiente manera:

Si el mecanismo tiene  $Nm$  elementos móviles, los grados máximos de libertad serán  $3Nm$ ; las restricciones que le imponen los pares inferiores para una configuración dada del mecanismo serán:

$$2P_i \text{ (} P_i = \text{número de pares inferiores que tiene el mecanismo).}$$

Los pares superiores  $P_s$  imponen una sola restricción, en consecuencia los grados de libertad remanentes se podrán calcular como:

$$G.L. = 3Nm - 2P_i - P_s$$

Si  $G.L. = 0$  entre las barras del mecanismo no hay movimiento relativo.

Mecanismo enclavado.

Si  $G.L. = 1$  el movimiento es completamente obligado.

Mecanismo desmodrómico.

Si  $G.L. \geq 2$  El mecanismo es lábil, flojo, no obligado.

### **Ejemplo**

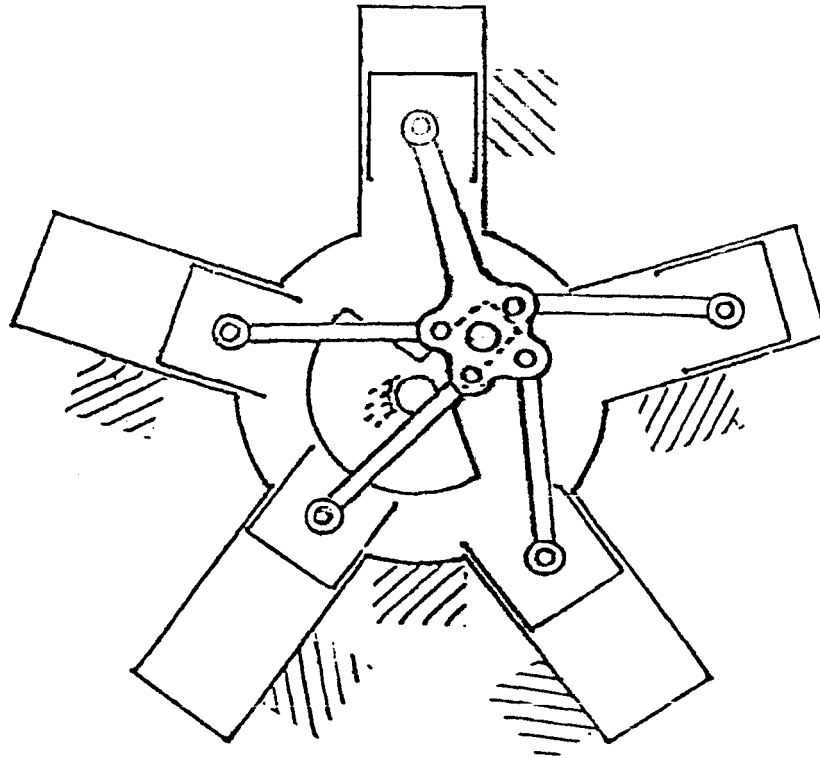
La siguiente figura es un esquema de un motor radial de aviación de cinco cilindros, se pretende determinar los grados de libertad de dicho mecanismo.

El carter y los cilindros constituyen el elemento fijo; existen como elementos móviles 5 pistones; 1 biela maestra; 4 bieletas; 1 cigüeñal, 11 elementos en total, y se cuentan 16 pares inferiores (superiores no hay).

Aplicando la fórmula se tendrá:

$$G.L. = 3 \times 11 - 2 \times 16 = 1$$

Luego el mecanismo es desmodrómico como era de suponer.

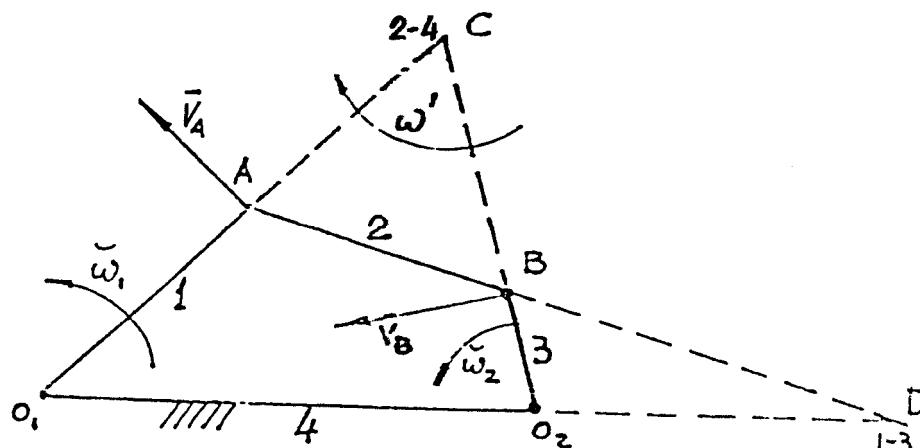


**Ejemplo:**

Determinada la condición de desmodrómico de un mecanismo y encontrados sus centros, se pueden resolver problemas como el que sigue. En el mecanismo del ejemplo 1 de la página (43); si se da al elemento 1 una rotación en sentido antihorario  $\omega_1$ , se pretende conocer la velocidad angular instantánea del elemento 3 para la configuración indicada.

El mecanismo es desmodrómico, bastaría para comprobarlo determinar sus grados de libertad de la misma manera que se hizo en el ejemplo anterior.

Sus centros ya habían sido determinados.





La velocidad del punto  $A$  es  $\vec{V}_A = \vec{\omega}_1 \wedge (A - O_1)$  y es perpendicular, al elemento 1, esta es a su vez la velocidad con que se mueve el extremo  $A$  del elemento 2; el otro extremo, el  $B$  está obligado a moverse sobre una circunferencia de centro  $O_2$  y radio igual a la longitud del elemento 3; es decir, su desplazamiento será perpendicular al elemento 3; luego  $C$  es el centro instantáneo de rotación de la barra 2 y se puede establecer que, trabajando escalarmente, se tiene:

$$V_A = \omega_1 \cdot \overline{O_1A} = \omega' \cdot \overline{CA} \therefore \omega' = \omega_1 \frac{\overline{O_1A}}{\overline{CA}}$$

$$V_B = \omega' \cdot \overline{CB} = \omega_1 \cdot \frac{\overline{O_1A}}{\overline{CA}} \cdot \overline{CB} = \omega_2 \cdot \overline{O_2B} \therefore \omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_2B}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$$

Hemos determinado la velocidad angular  $\vec{\omega}_2$  de la barra 3 mediante el análisis del movimiento del elemento 2 respecto al 4, que es fijo, ello implicó la determinación del centro 2-4 que hemos identificado con la letra  $C$ .

La determinación puede hacerse en forma directa si se recuerda la definición de "centro" dada anteriormente; buscaremos el centro que vincula al elemento motor con el elemento cuyo movimiento se pretende determinar, en este caso será el 1-3.

Si aplicamos ahora la relación entre las velocidades angulares y los centros determinados por el Teorema de Kennedy (ver apéndice de este capítulo) se tendrá:

$$\omega_1 \cdot \overline{O_1D} = \omega_2 \cdot \overline{O_2D} \therefore \omega_2 = \omega_1 \frac{\overline{O_1D}}{\overline{O_2D}}$$

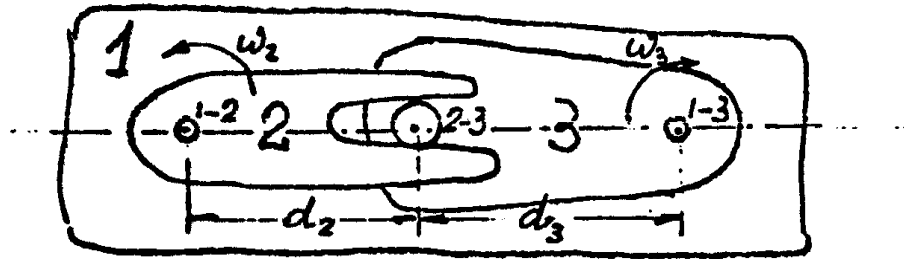
El problema queda solucionado más fácilmente.



**APÉNDICE**

**RELACIÓN ENTRE LAS VELOCIDADES ANGULARES Y LOS CENTROS, DETERMINADOS POR EL TEOREMA DE KENNEDY**

Sea el mecanismo utilizado para la demostración del Teorema de Kennedy:



El centro 2-3 debe tener la misma velocidad como perteneciente al elemento 2 que como perteneciente al elemento 3; supongamos que 2 rota con velocidad angular  $\omega_2$  relativa a 1, y 3 lo hace con  $\omega_3$ ; la velocidad de 2-3 como perteneciente a 2 es en módulo  $\omega_2 |C_{1-2}C_{1-3}| = \omega_2 d_2$  y esta debe ser igual a la que le corresponde como perteneciente al elemento 3:

$$-\omega_3 |C_{2-3}C_{1-3}| = -\omega_2 d_3$$

Luego:

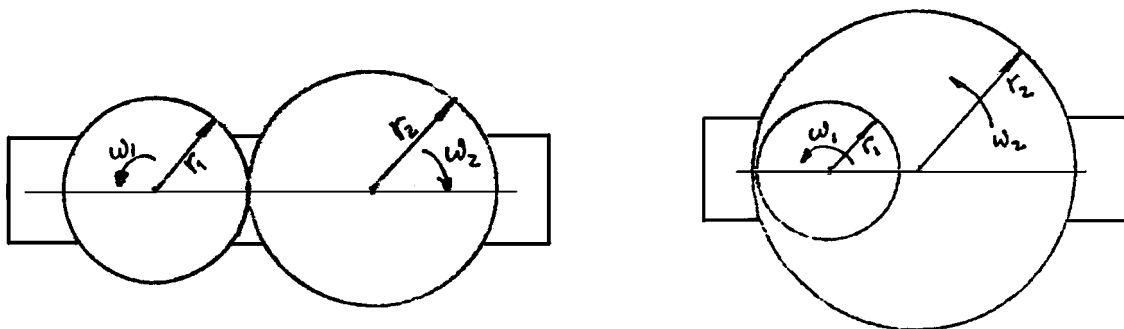
$$\omega_2 d_2 = -\omega_3 d_3 \therefore \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{d_3}{d_2}$$

Las velocidades angulares de los elementos 2 y 3 relativas a 1 son inversamente proporcionales a las distancias de los centros 1-2 y 1-3 al centro 2-3.

**Ejemplo:** Ruedas de fricción

$$\omega_1 r_1 = -\omega_2 r_2 \therefore \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1}$$

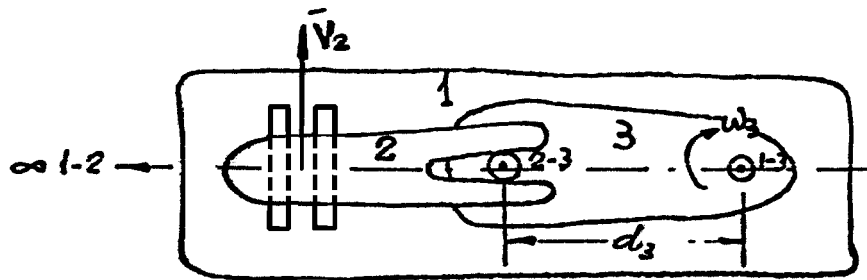
$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \therefore \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$







Si uno de los elementos estuviese vinculado al 1 mediante un par de deslizamiento



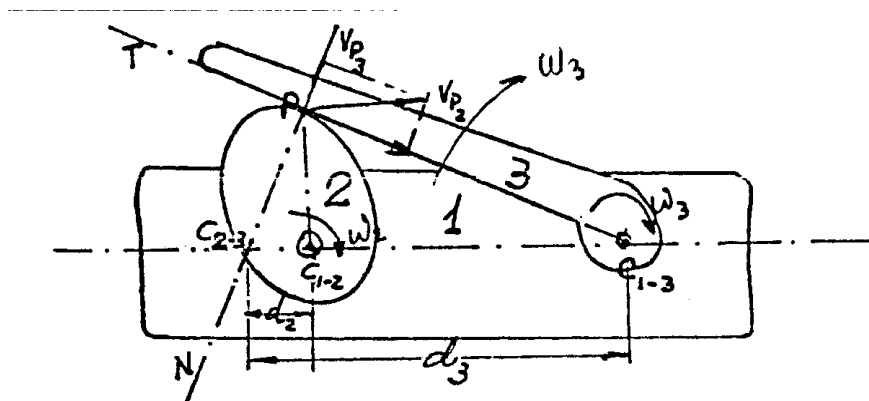
Al ser traslación  $V_2 = V_{2-3}$   
 por pertenecer  $C_{2-3}$  al  
 elemento 2.

El centro 1-2 estaría en el  $\infty$  en la dirección perpendicular al desplazamiento, que debe coincidir con la dirección 2-3 1-3 (Kennedy).

La distancia  $d_2$  sería  $\infty$  y la  $\omega_2 = 0$ , y el elemento 2 tendría un movimiento de traslación con velocidad  $V_2$  que también correspondería al centro 2-3 por pertenecer al elemento 2.

Luego puede establecerse:  $V_2 = \omega_3 d_3$

**RELACIÓN DE LAS VELOCIDADES ANGULARES CUANDO INTERVIENEN PARES SUPERIORES**



El elemento 1 es el soporte; 2 es la leva y 3 el seguidor;  $C_{1-2}$  y  $C_{1-3}$  son los centros correspondientes a pares de rotación; entre los elementos 2 y 3 existe un par superior (contacto lineal); el seguidor se mantiene en contacto con la leva por gravedad o por la acción de un resorte por ejemplo.

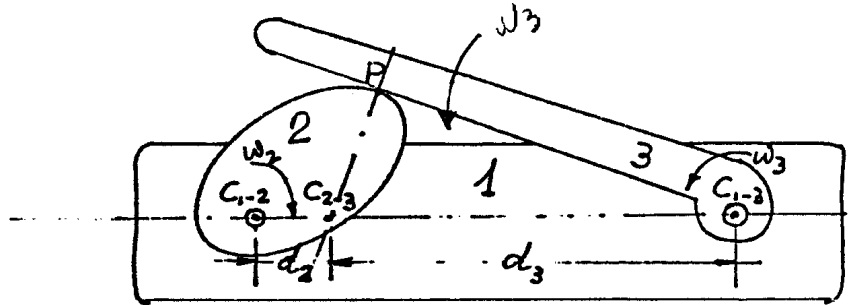
Las velocidades en P como perteneciente al elemento 2 o al 3 deben tener la misma componente sobre la Normal, ya que las superficies deben permanecer constantemente en contacto, la velocidad relativa coincide en consecuencia con la dirección de la tangente común a las superficies, esto funciona como un par de deslizamiento.

El centro instantáneo de rotación  $C_{2-3}$  estará sobre la normal común y precisamente donde esta interseca a la línea de los centros  $C_{1-2}$  y  $C_{1-3}$  (T. de Kennedy).

Se puede establecer entonces: 
$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{d_3}{d_2}$$



Si la disposición fuese la siguiente:



Leva y seguidor giran en el mismo sentido o en el opuesto, según  $C_{2-3}$  divida la línea de los centros externa o internamente.

La velocidad de resbalamiento del seguidor sobre la leva, es la velocidad de P (como perteneciente a 3) relativa a 2, esto es:  $\omega_{3/2} \cdot |C_{2-3} \cdot P| = (\omega_3 - \omega_2) \cdot |C_{2-3} \cdot P|$

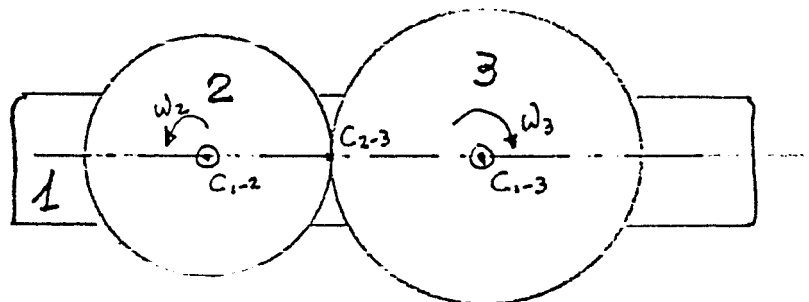
Si el punto de contacto P se encuentra en  $C_{2-3}$  no habrá deslizamiento y el movimiento será de rodadura pura.

$$\begin{array}{lll}
 V_{T2} = \omega_2 \cdot \overline{C_{2-3}P} & \Delta V_T = V_{T3} - V_{T2} = (\omega_3 - \omega_2) \cdot \overline{C_{2-3}P} & P \text{ es como si se moviera} \\
 V_{T2} = \omega_3 \cdot \overline{C_{2-3}P} & P \equiv C_{2-3}; \Delta V_T = 0 & \text{con } V_T \text{ alrededor de } C_{2-3}
 \end{array}$$

Para que la relación de velocidades angulares  $\omega_2/\omega_3$  permanezca constante, la posición de  $C_{2-3}$  no debe cambiar durante el movimiento, esto nos lleva a la importante conclusión: SI UN CUERPO TRANSMITE ROTACIÓN PLANA A OTRO POR CONTACTO LINEAL, LA RELACIÓN DE SUS VELOCIDADES ANGULARES PERMANECERÁ CONSTANTE CUANDO LA NORMAL COMÚN A LAS SUPERFICIES DE CONTACTO CORTE A LA LÍNEA DE LOS CENTROS SIEMPRE EN EL MISMO PUNTO.

En un movimiento como el descrito, el centro instantáneo  $C_{2-3}$ , invariable respecto a los otros centros, describe trayectorias circulares sobre los planos de los elementos 2 y 3 dando origen a la base y la ruleta del movimiento en cuestión. La relación de velocidades angulares constante, implica que la base y la ruleta sean circunferencias.

Los elementos podemos entonces reemplazarlos por cilindros circulares de radios iguales a los de la base y la ruleta, entre los que se transmitirá la misma relación de velocidades por puro rodamiento de contacto.

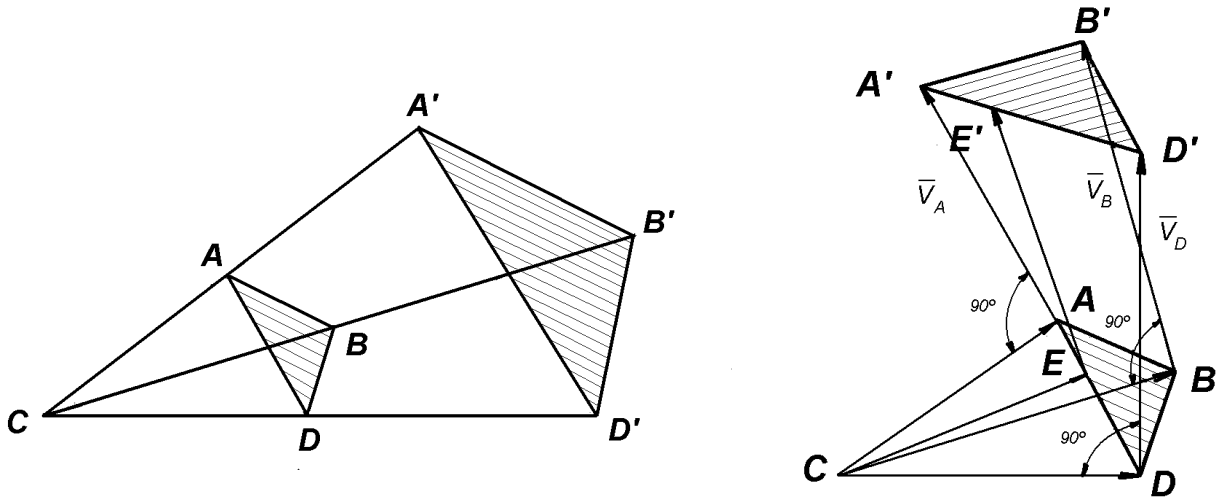




Tales cilindros o Ruedas de Fricción, son también las superficies primitivas de un par de ruedas dentadas que cumplen con la relación de transmisión impuesta. La forma de los dientes debe ser tal que cumplan con las condiciones establecidas más arriba, y es analizada en la Pág. 56 y siguientes del suplemento del presente capítulo.

### IMAGEN DE VELOCIDADES

Si a un sistema de vectores que parten de un punto fijo se los multiplica por un escalar cualquiera, aquellos se alargan o se acortan y sus extremos libres forman figuras semejantes a las originales. Se forman figuras semejantes también si se localizan los vectores velocidad en los respectivos puntos, esto equivaldría a sumar a los vectores posición de los puntos respecto al centro instantáneo de rotación  $C$  vectores que se obtienen, multiplicando estos últimos por  $\omega$  y girándolos  $90^\circ$  en sentido de la rotación.



$$\left. \begin{aligned} \overline{CA'} &= \omega \cdot \overline{CA} \\ \overline{CB'} &= \omega \cdot \overline{CB} \\ \overline{CD'} &= \omega \cdot \overline{CD} \end{aligned} \right\} \omega = \text{escalar}$$

$$\begin{aligned} |A' - A| &= \omega \cdot |A - C| = V_A; (A' - A) = V_A \\ |B' - B| &= \omega \cdot |B - C| = V_B; (B' - B) = V_B \\ |D' - D| &= \omega \cdot |D - C| = V_D; (D' - D) = V_D \end{aligned}$$

La figura obtenida es la imagen de velocidades del sistema dado.

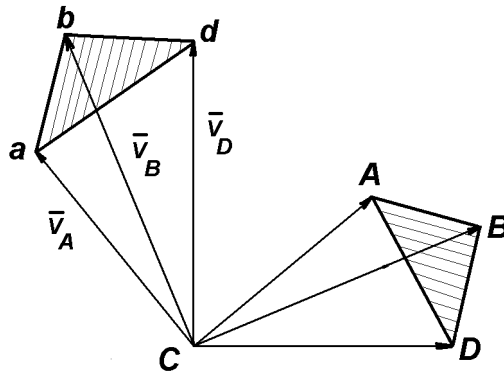
Un punto cualquiera de la figura en movimiento tiene por velocidad en ese instante el vector formado por el punto correspondiente de la imagen de velocidades como extremo libre y el punto de la figura como punto de aplicación.

$$(E' - E) = \overline{V}_E$$



**IMAGEN POLAR DE VELOCIDADES**

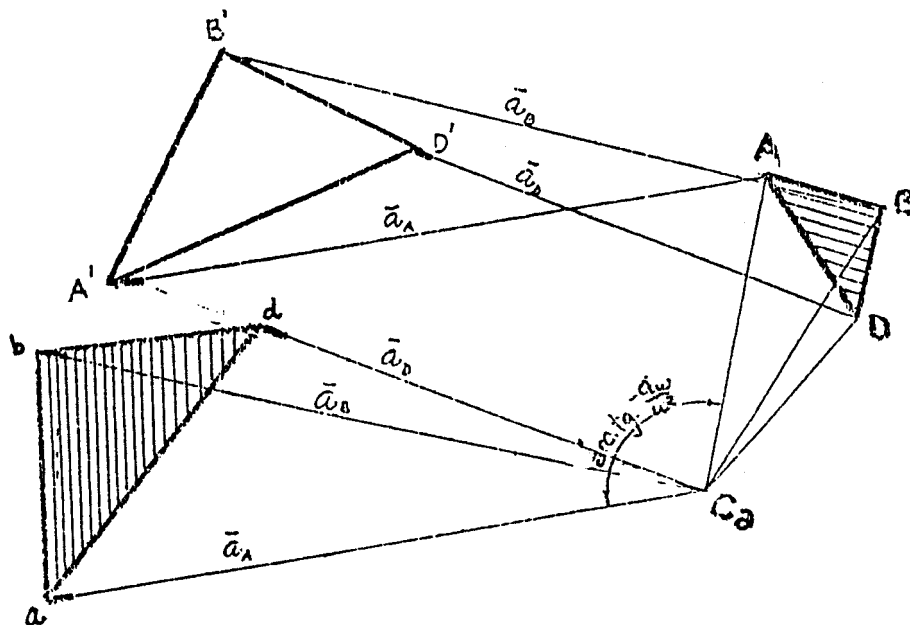
Si a partir de  $C$  se toman vectores equipolentes a las velocidades de los puntos ( $A$ ;  $B$ ;  $D$ ; etc.) se obtiene otra figura semejante a las anteriores, esta es la imagen polar de velocidades.



**IMAGEN DE ACELERACIONES**

Sean  $A$ ;  $B$  y  $D$  tres puntos de una figura en movimiento plano y  $C_a$  el centro de aceleraciones. Si a los vectores  $(A - C_a)$ ,  $(B - C_a)$  y  $(D - C_a)$  se los multiplica por  $\sqrt{a_\omega^2 + \omega^4}$  y se los hace girar en el sentido de  $\bar{a}_\omega$  un ángulo igual a  $\arctg \frac{-a_\omega}{\omega^2}$  alrededor de  $C_a$ ; los extremos libres de estos vectores (aceleraciones de los puntos respectivos) conforman una figura  $abd$  semejante a  $ABD$ . Se ha obtenido la IMAGEN POLAR DE ACELERACIONES.

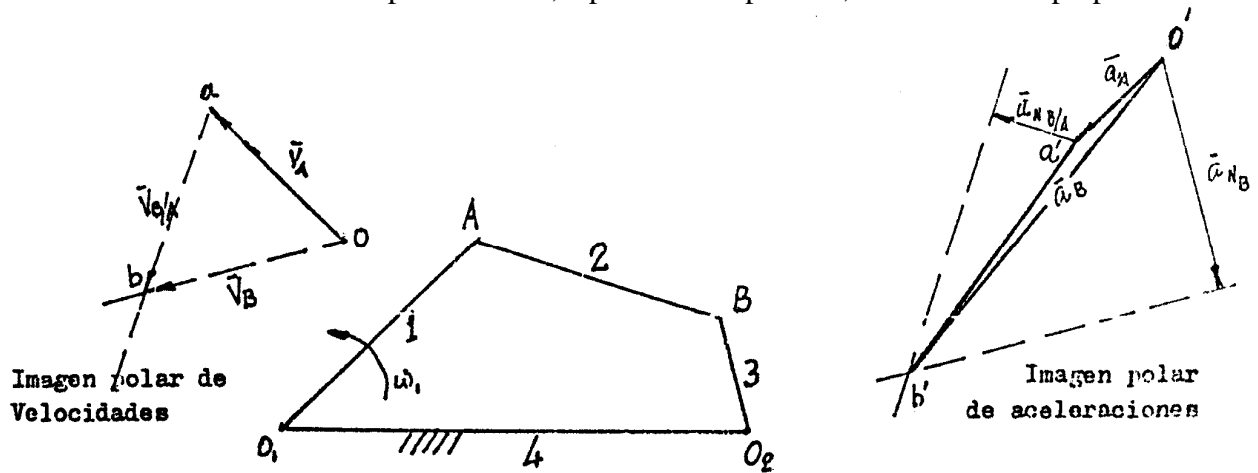
Si los vectores aceleración se trazan todos a partir de sus respectivos puntos se obtienen puntos tales como los  $A'$ ;  $B'$  y  $D'$  que forman una figura semejante a la  $ABD$  que es la IMAGEN DE ACELERACIONES.





**Ejemplo**

Retomando el cuadrilátero articulado del ejemplo anterior en el que se supone al elemento 1 como motor, se pretende trazar la imagen polar de velocidades y la de aceleraciones del elemento 2. Si se supone que la manivela 1 rota alrededor de  $O_1$  con  $\omega_1 = cte$ , la velocidad de  $A$  será  $\omega_1 \cdot \overline{O_1A} = V_A$ . En una escala conveniente se representa  $\overline{V_A}$ , a partir de un polo  $O$ , la dirección es perpendicular al



elemento 1 y el sentido el que corresponde a  $\omega_1$ .

El punto  $A$  pertenece también al elemento 2, el punto  $D$  de este elemento tendrá como velocidad la suma de la velocidad de  $A$  más la velocidad relativa de  $B$  respecto a, que será la que corresponde a una rotación alrededor de  $A$ ; de esta conocemos únicamente su dirección, perpendicular a la dirección de 2.

Como el punto  $B$  pertenece también al elemento 3 y este debe rotar alrededor del punto  $O_2$ , la velocidad absoluta de  $B$  será perpendicular a 3 y como es velocidad absoluta la trazamos a partir de  $O$ , la intersección de estas dos direcciones determina el extremo libre de  $\overline{V_B}$ .

El segmento  $ab$  es la imagen polar de velocidades del elemento 2 y representa en este caso la velocidad relativa entre  $B$  y  $A$  medida en la escala elegida.

Para el trazado de la imagen polar de aceleraciones se parte nuevamente del punto  $A$ , como perteneciente al elemento 1 tendrá únicamente aceleración normal  $a_1 = \frac{V_1}{O_1A}$  que la tomamos a

partir de un polo  $O'$  en escala de aceleraciones, se obtiene el punto  $a'$ .

Como el elemento 2 tiene un movimiento de rotación alrededor de  $A$  la aceleración de  $B$  respecto

a tendrá una componente normal y una tangencial, la primera vale  $\frac{V_{B/A}^2}{AB}$  y su sentido es de  $B$  hacia  $A$  y la segunda es perpendicular al elemento 2 (conocemos dirección únicamente).

Por otra parte la aceleración absoluta de  $B$  como perteneciente al elemento 3 está compuesta por una aceleración normal que vale  $\frac{V_B^2}{O_1B}$  y una tangencial de la que se conoce únicamente su

dirección. Donde se intersectan las dos direcciones tendremos el punto  $b'$  que completa con el  $a'$  la imagen polar de las aceleraciones del elemento 2.

Como puede observar para poder trazar la imagen de aceleraciones es necesario como es lógico, conocer previamente la imagen de velocidades.



## **CINEMÁTICA DE LAS RUEDAS DENTADAS**

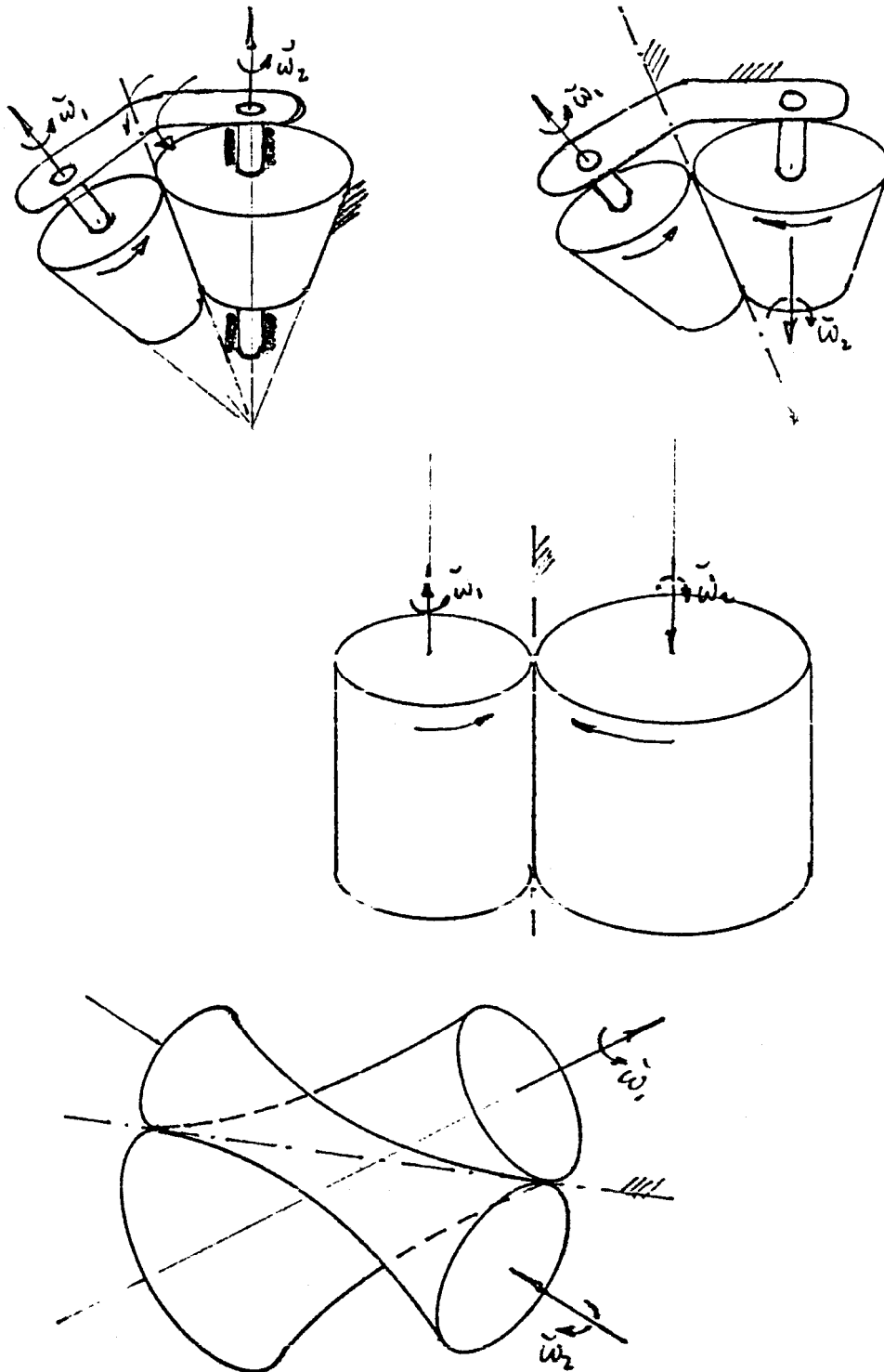
En el capítulo correspondiente a Cinemática del Sólido se vio que cuando se componían dos rotaciones axiales (concurrentes, paralelas o alabeadas), se obtenían desde el punto de vista cinemático axoides (que eran superficies cónicas, cilíndricas o hiperboloides de revolución regladas según el caso) y el movimiento resultante aparecía como la rodadura sin resbalamiento de la superficie solidaria con el sólido sobre la superficie fija en el espacio, de tal manera que en cada instante, la generatriz común de contacto de ambas superficies determinaba el eje instantáneo de rotación.

Si se materializan esas superficies, se tendrían juegos de ruedas (en la práctica ruedas de fricción) que permitirían establecer el movimiento dado, o bien podríamos considerarlas como las superficies primitivas de ruedas dentadas (cónicas, cilíndricas o hipoidales) según se dijo en su momento, los dientes son tallados por encima y por debajo de dichas superficies.

En los dispositivos descriptos para el estudio de composición de rotaciones, aparecía una superficie fija en el espacio y otra solidaria al móvil rodando sobre aquella; el elemento que mantiene la constancia de la rodadura (aro o brazo) gira con la velocidad de arrastre y el eje instantáneo de rotación también lo hace estando en el plano de aquel. Esta disposición se encuentra en la práctica en los trenes epicicloidales estudiados en este capítulo pero la más común (tren común) consiste en que el eje instantáneo de rotación quede fijo; bastaría para ello dar al brazo una rotación igual y contraria a la rotación de arrastre, la que lo detendría, y para que exista rodadura entre los axoides, el que era fijo debe girar ahora en sentido contrario al que lo hacía el brazo. De tal manera los axoides girarían ahora sobre sus ejes solidarios al brazo, ahora bastidor de la máquina, cumpliendo con las velocidades angulares impuestas.

De lo anterior se desprende que las superficies primitivas de ruedas dentadas que cumplan con una determinada relación de transmisión entre sus ejes, se pueden establecer como si fueran los axoides del movimiento estudiado, cambiando, en este caso de tren común, el sentido de rotación de una de ellas.

Como en realidad lo que nos interesa es la rotación relativa de un eje respecto al otro, cinemáticamente se ha operado como en el capítulo de Movimiento Relativo, a las velocidades absolutas se les ha restado la velocidad de arrastre, obteniéndose en cada caso la velocidad relativa de una rueda respecto a la otra.



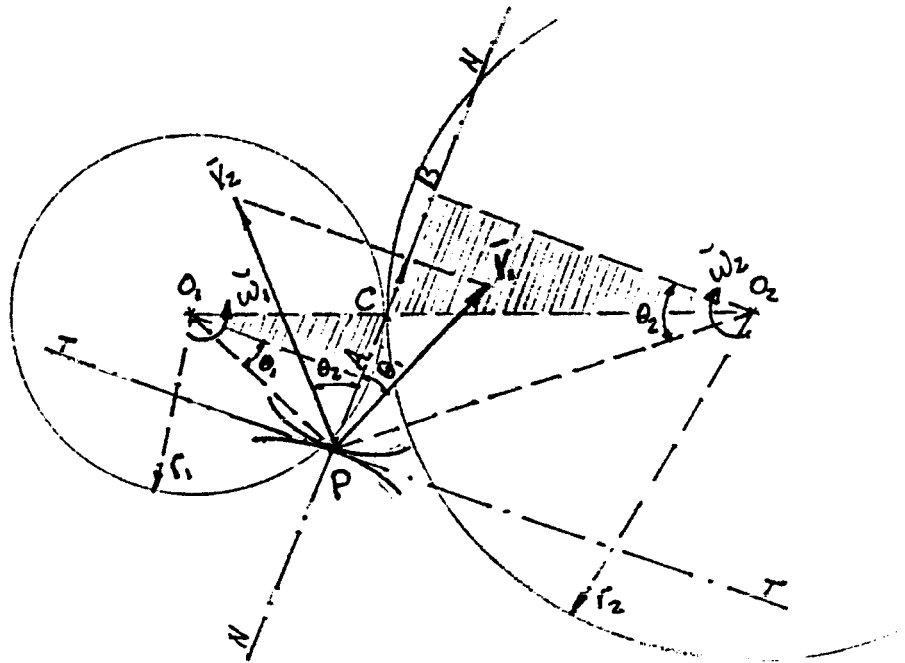
Las superficies laterales de los dientes de las ruedas, por encima y por debajo de las superficies primitivas, deben ir entrando gradualmente en contacto una con otra, estas deben ser superficies conjugadas, su estudio se hace sobre un plano perpendicular a ambas superficies., es por eso que para establecer los principios fundamentales de los engranajes tomaremos primero el caso más simple que corresponde a dos ruedas cilíndricas de dentado recto. En este caso el plano normal a las superficies en contacto permanece constante y es también normal a las superficies cilíndricas



primitivas; todo se reduce entonces al estudio del sistema en su sección por el plano normal, donde las superficies primitivas son ahora circunferencias primitivas y los flancos de los dientes los perfiles de los mismos.

**TEOREMA GENERAL DE LAS RUEDAS DENTADAS**

“La normal común en el punto de contacto de los perfiles de los dientes de un juego de ruedas dentadas, pasa siempre por el punto de contacto de las circunferencias primitivas”.



Supongamos dos ruedas que pueden girar alrededor de ejes que pasan por  $O_1$  y  $O_2$  de tal manera que una que gira con velocidad angular  $\omega_1$ , impulsa a la otra con velocidad angular  $\omega_2$ .

La transmisión se hace mediante dientes, dos de cuyos perfiles son los dibujados; en el punto de contacto de ellos ( $P$ ) trazamos la tangente ( $TT$ ) y la normal ( $NN$ ) común a los mismos.

La velocidad de  $P$  como perteneciente a la rueda  $I$  es:  $\bar{V}_1 = \bar{\omega}_1 \wedge (P - O_1)$

Y como perteneciente a la rueda  $II$  es:  $\bar{V}_2 = \bar{\omega}_2 \wedge (P - O_2)$

Si se proyectan ambas velocidades sobre la tangente ( $TT$ ) y sobre la normal ( $NN$ ) debemos considerar que:

Las componentes de ambas velocidades sobre la normal deben ser idénticas, de lo contrario el diente impulsor se incrustaría en el conducido, o en su defecto se alejarían no transmitiéndose el movimiento.

Sobre la tangente las componentes pueden ser diferentes (siempre existe un resbalamiento).

Si se trazan desde  $O_1$  y  $O_2$  perpendiculares a  $NN$  quedan formados los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  idénticos a los proyectantes de las velocidades sobre la normal.

$$V_1 \cdot \cos \theta_1 = \omega_1 \cdot \underbrace{|P - O_1| \cdot \cos \theta_1}_{|A-O_1|} = V_2 \cdot \cos \theta_2 = \omega_2 \cdot \underbrace{|P_2 - O_2| \cdot \cos \theta_2}_{|A-O_2|}$$





$$\omega_1 \cdot |A - O_1| = \omega_2 \cdot |B - O_2| \therefore \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{|B - O_2|}{|A - O_1|}$$

En los triángulos formados por la línea de los centros;  $NN$  y sus respectivas normales, se tiene por ser semejantes:

$$\frac{|C - O_1|}{|C - O_2|} = \frac{|A - O_1|}{|B - O_2|} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Esto significa que la normal común a las superficies en contacto, divide a la línea de los centros en segmentos inversamente proporcionales a las velocidades de rotación:

$$\frac{|C - O_1|}{|C - O_2|} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Como en el caso más general la distancia entre centros de los ejes a vincular  $|O_1 - O_2|$  se mantiene constante, y a su vez la relación  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  se pretende constante, el punto  $C$  es fijo y determina los radios  $r_1$  y  $r_2$  de las dos circunferencias, que tienen la misma velocidad periférica.

En efecto:

$$\frac{|C - O_1|}{|C - O_2|} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \therefore r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2$$

Siendo la misma la velocidad periférica, el movimiento se reduce a una rodadura sin resbalamiento de una circunferencia sobre la otra.

Las encontradas son las circunferencias primitivas de las ruedas dentadas que cumplen con la relación de velocidades impuesta y el punto de contacto  $C$  es el centro instantáneo de rotación.

Cualquiera sea la ubicación de los dientes engranados, la normal común a la superficie de sus flancos debe pasar por el punto de contacto de las circunferencias primitivas.

Cuando en el capítulo de Movimiento Plano se estudiaron las trayectorias polares, se dijo (“Miscelánea”) que para cualquier figura que estuviese en movimiento plano, las normales a las trayectorias de todos sus puntos pasan por  $C$ ; de tal manera es suficiente esperar que la normal a la trayectoria de un punto cualquiera de del perfil elegido, sea también normal al mismo, en ese instante, la curva dada y su conjugada harán contacto en dicho punto.

Esta propiedad permite adoptar una curva cualquiera como perfil del diente de una rueda, el perfil conjugado se obtiene como la envolvente de las sucesivas posiciones de la curva elegida en su movimiento solidario con la primera de las ruedas; de esta manera el perfil elegido y su conjugado cumplen con el teorema general de los engranajes.

### DETERMINACIÓN DEL PERFIL CONJUGADO DE UN PERFIL DADO

Sea el perfil elegido (de trazo continuo en la figura) que por comodidad hacemos pasar por  $C$ , aunque no es imprescindible.

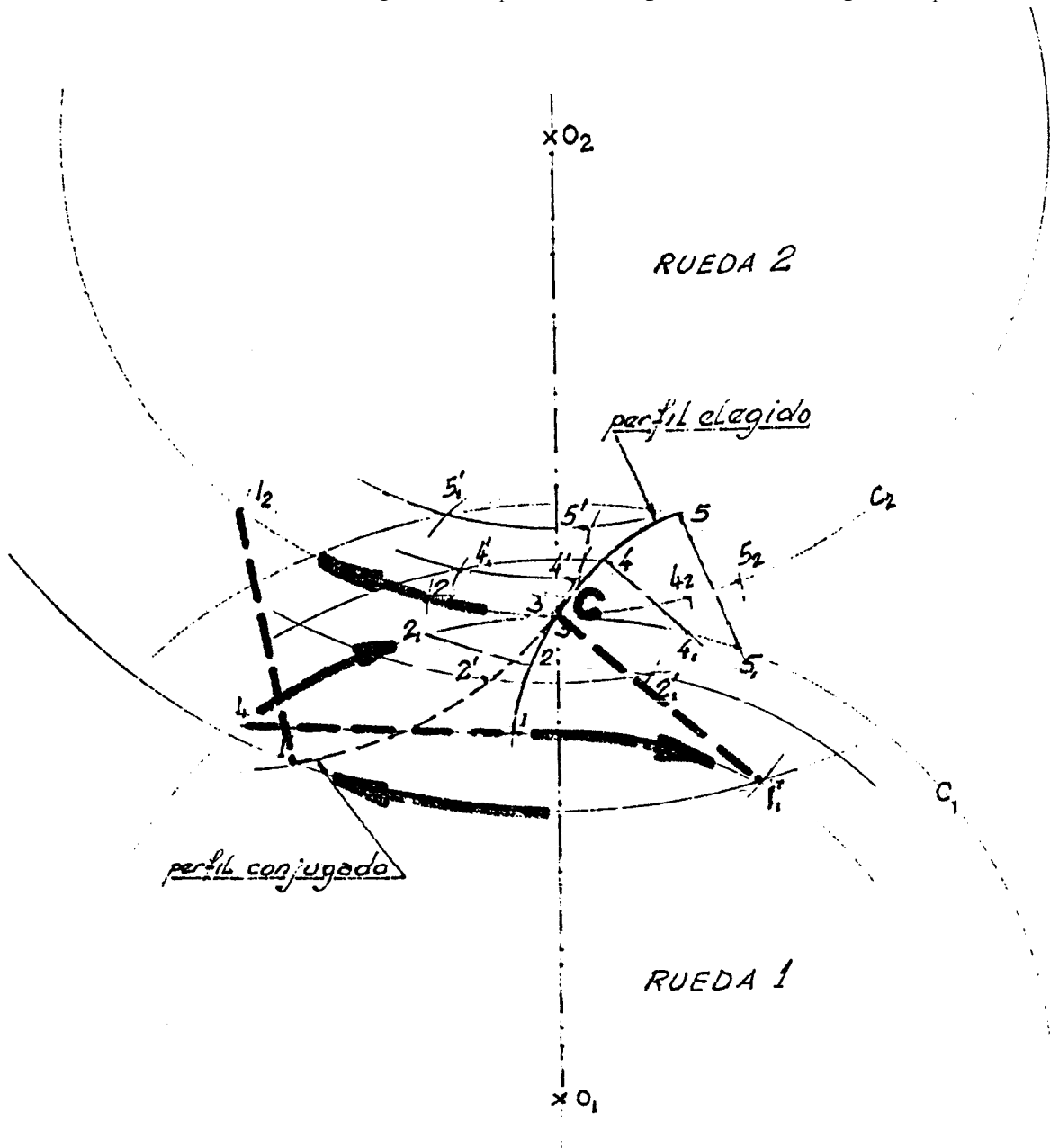
Si dividimos la longitud del perfil en tramos determinados por los puntos 1; 2; 3; 4; y 5 y trazamos por ellos las normales al mismo; de acuerdo con el teorema general de las ruedas dentadas, cuando cada una de esas normales pase por el punto  $C$ , cada uno de esos **puntos hará contacto con el correspondiente del perfil conjugado.**

Las normales trazadas al perfil cortan a la circunferencia primitiva  $C_1$  en puntos tales como el  $1_1$ ;  $2_1$ ;  $3_1$ ;  $4_1$  y  $5_1$ .



Supongamos que llevamos el punto  $1_1$  al  $C$ , habrá para ello que hacer rotar  $C_1$  a la derecha de tal manera que ruede sobre  $C_2$  y el punto  $1_1$  se encontrará sobre el  $1_2$  de la rueda (2). Los arcos  $C_1 1_1$  y  $C_1 1_2$  evidentemente deben ser iguales.

El punto 1 del perfil como perteneciente a la rueda (1) girará sobre una circunferencia de centro  $O_1$  y se ubicará a una distancia de  $C$  igual a  $\overline{1_1 1_2}$  (normal al perfil dado en 1) punto  $1'_1$ .



En ese punto el perfil dado hace contacto con el conjugado de la rueda (2), luego si se traza una circunferencia con centro en  $O_2$  que pase por este punto, ese será el camino del punto que estamos buscando. Llevando ahora a las circunferencias primitivas a su posición inicial, el punto de referencia estará sobre la circunferencia últimamente trazada y sobre un arco que con radio igual a la normal  $\overline{1_1 1_2}$  podemos trazar con centro en  $1_2$ , obtenemos así el punto  $1'_1$ , correspondiente al perfil conjugado.

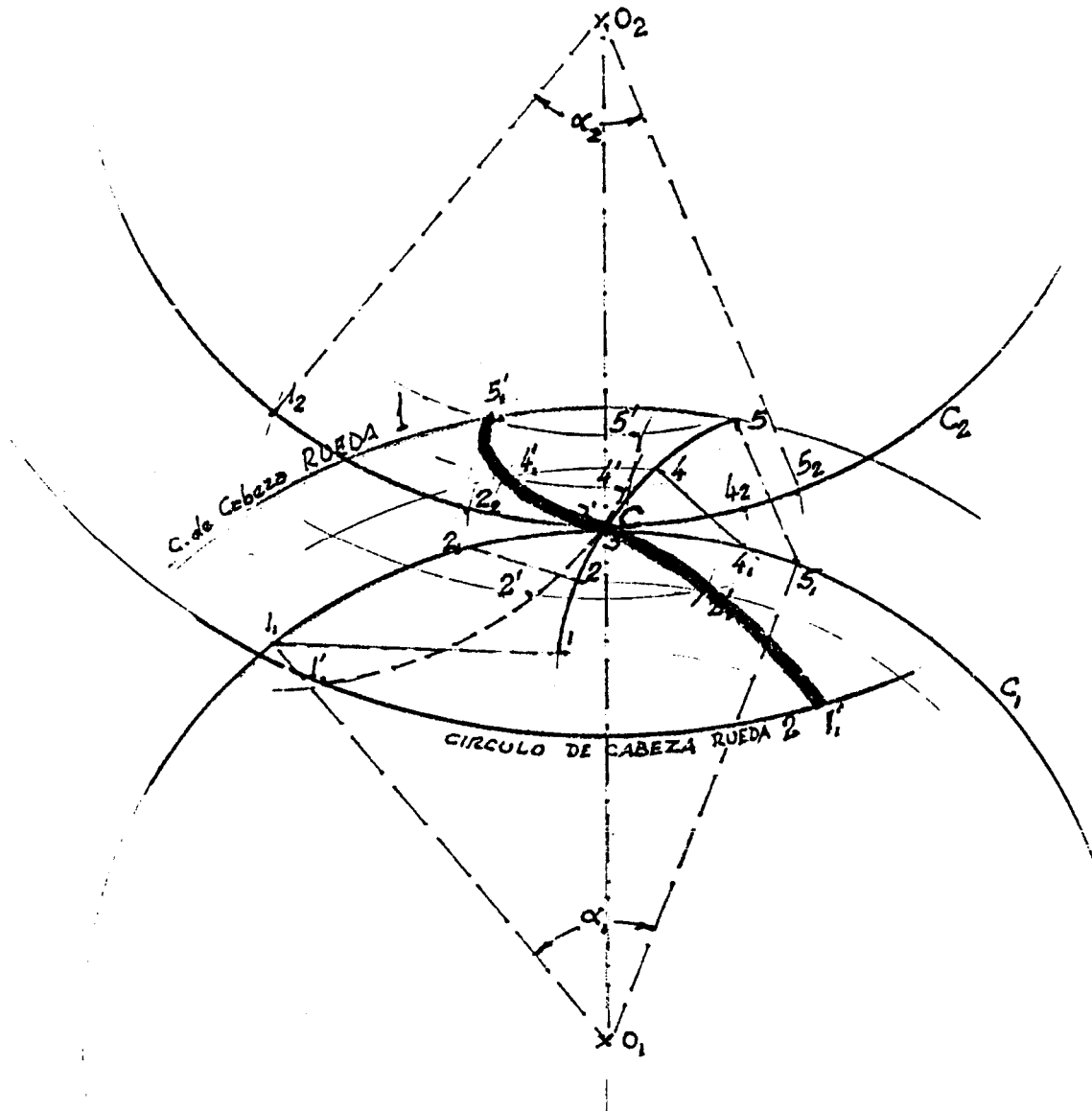


En la figura el punto 3 por coincidir con  $C$  no necesita otro tratamiento. La unión mediante un trazo continuo de todos los puntos obtenidos nos da el perfil conjugado del dado.

Existen varios procedimientos para la determinación del perfil conjugado de un perfil dado, pero se ha elegido el expuesto, conocido como de Poncelet, porque el mismo nos da simultáneamente puntos como el  $1_1; 2_1; \dots; 5_1$  que son los puntos donde hacen contacto los puntos correspondientes de ambos perfiles, la unión mediante una línea continua de todos ellos nos determina la LINEA DE ENGRANE, a lo largo de ella se van produciendo sucesivamente los contactos de ambos dientes, como es lógico esta línea pasa siempre por el punto  $C$ .

El segmento de línea de engrane comprendido entre los círculos de cabeza de cada rueda dentada, es la parte útil de la misma, sus extremos marcan el principio y el fin del engrane; los arcos de ambas ruedas medidos sobre las circunferencias primitivas, correspondientes a ese segmento de la línea de engrane (que son iguales), se denomina ARCO DE ENGRANE; el mismo debe ser mayor que el paso del engranaje para que siempre haya un par de dientes en contacto. La relación entre el arco de Engrane y el paso se denomina GRADO DE RECUBRIMIENTO Ó DURACIÓN DE ENGRANE ( $\varepsilon$ ) y su valor debe ser siempre mayor que 1; por lo menos:  $\varepsilon = 1,15$  a  $1,2$

En la figura siguiente se ha supuesto que los círculos de cabeza de cada rueda coinciden con los puntos extremos de los perfiles dado y conjugado, la línea de engrane es en consecuencia útil en toda la longitud encontrada y los arcos de engrane sobre las circunferencias primitivas, corresponden para la rueda (1) al arco  $1_1 C 5_1$  (ángulo central  $\alpha_1$ ) y para la rueda (2) el arco  $1_2 C 5_2$  (ángulo central  $\alpha_2$ ).





## **DIENTES CICLOIDALES Y DE EVOLVENTE**

En la técnica no se requiere fijar a priori uno de los perfiles de diente y encontrar su conjugado, sino que se adoptan pares de curvas conjugadas que tengan condiciones aptas desde el punto de vista de la transmisión.

En engranajes se emplean dos familias de curvas: las cíclicas y las de evolvente.

### **CURVAS CÍCLICAS**

Las curvas cíclicas se obtienen como trayectoria de un punto de una circunferencia, llamada RULETA, que rueda sin resbalar sobre una línea de base. Si la base es una recta, la ruleta genera una cicloide; si la base es una circunferencia, sobre la cual gira la ruleta exteriormente genera una epicicloide y si lo hace interiormente genera una hipocicloide. Por conveniencia mecánica se trazan dos pares de curvas conjugadas a ambos lados de las circunferencias primitivas para completar el perfil de los dientes, adoptando dos circunferencias ruletas que pueden ser o no de distinto diámetro.

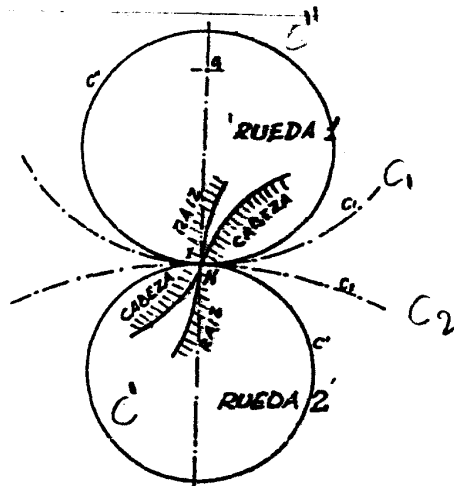
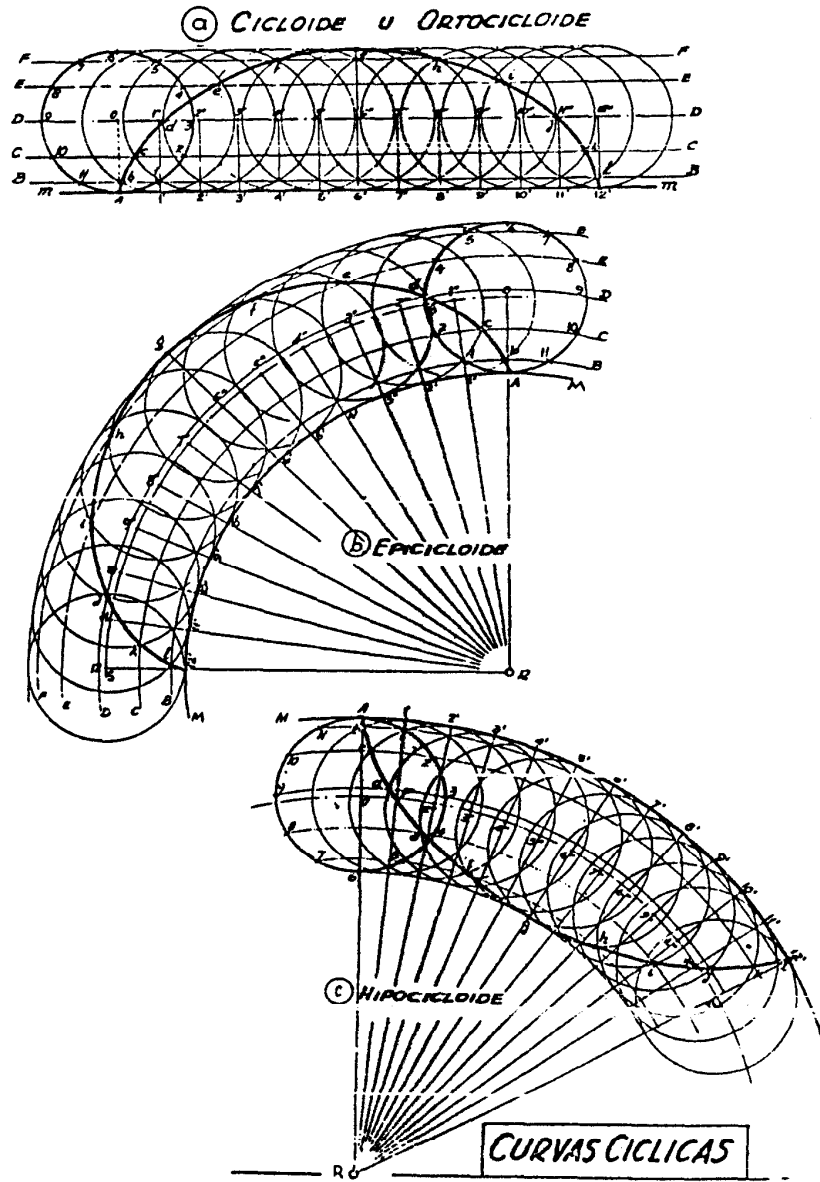
Para pares de ruedas dentadas aisladas, los diámetros de las ruletas pueden ser arbitrarios; en los juegos de ruedas armónicas, donde los engranajes son intercambiables y las líneas de engrane de los dientes deben poder superponerse en todas las ruedas del juego, el diámetro de la ruleta es único.

En este caso se toma como diámetro de la ruleta el radio primitivo de un piñón de 15 dientes, del mismo paso que el de las ruedas que se van a trazar. Para el trazado de los perfiles de los dientes debe tomarse el punto "N" de las ruletas en coincidencia con el punto "I" de tangencia de las circunferencias primitivas para un instante dado.

Rodando la ruleta  $C'$  sobre  $C_1$  se genera una Epicicloide, que será el perfil de la cabeza del diente de la rueda (1) y rodando sobre  $C_2$  se genera una hipocicloide, perfil de la raíz del diente de la rueda (2).

Rodando la ruleta  $C''$  sobre  $C_2$  se genera una epicicloide, perfil de la cabeza del diente de la rueda (2) y sobre  $C_1$  una hipocicloide, perfil de la raíz del diente de la rueda (1).

Es decir, que tratándose de ruedas exteriores, el perfil de la cabeza de los dientes es una epicicloide y la raíz una hipocicloide.





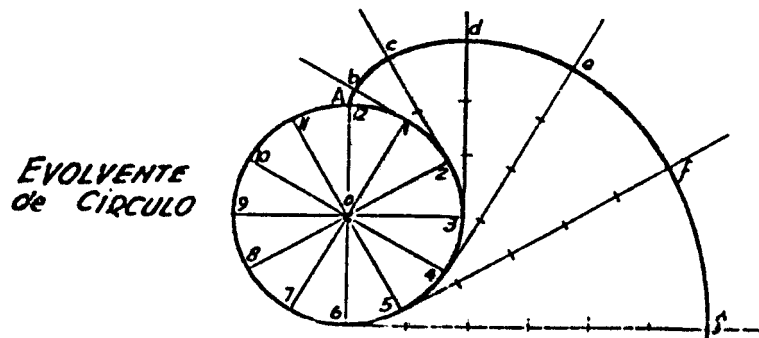
## CURVAS DE EVOLVENTE

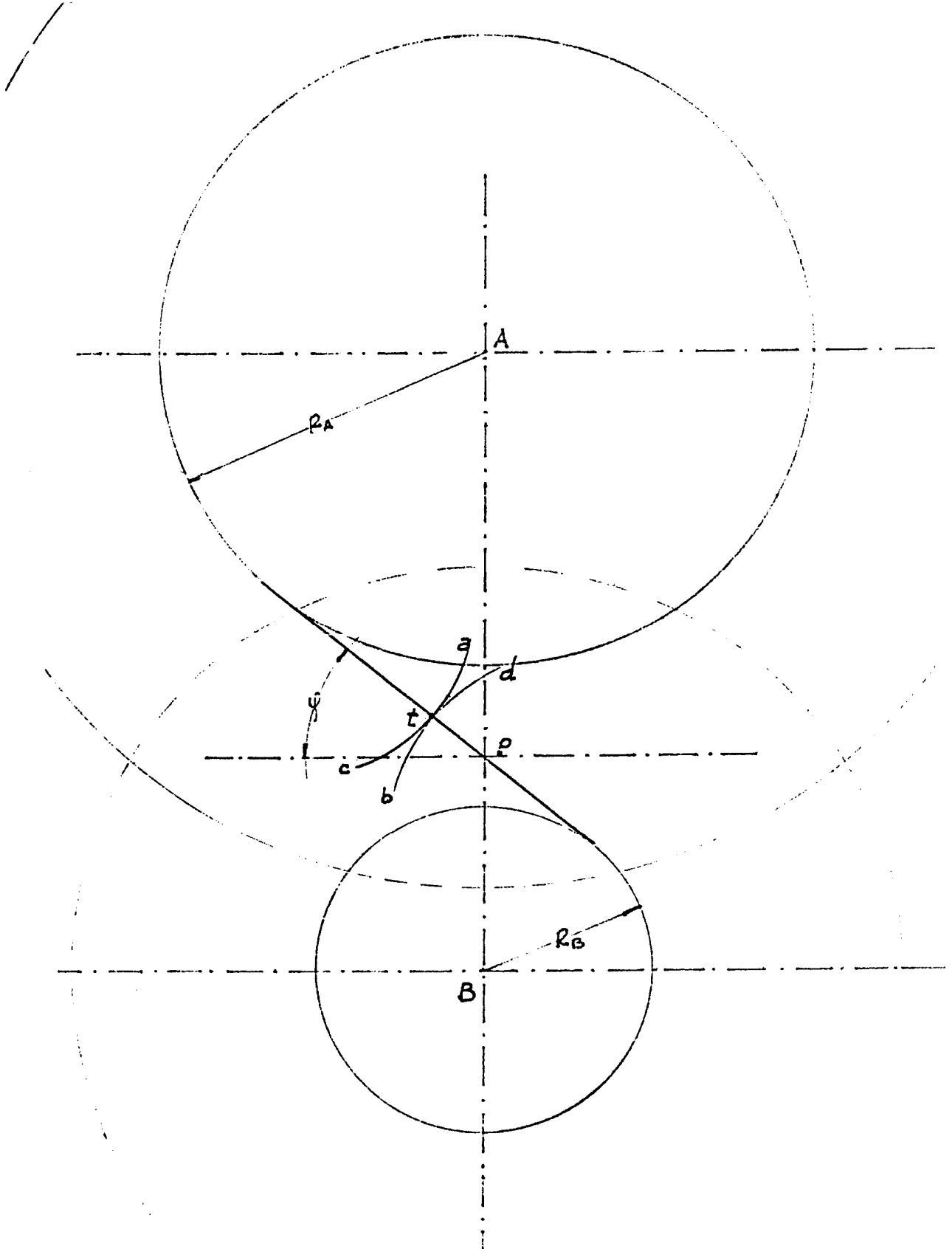
La curva evolvente constituye la base de casi todos los perfiles de diente actualmente en uso general. El perfil del diente es la evolvente de una circunferencia base ligeramente menor que la circunferencia primitiva.

En la figura se muestra una cuerda con un punto trazante  $t$ , arrollada alrededor de dos discos con centros en  $A$  y  $B$ . Cuando gira el  $A$ , el punto trazante describe la evolvente  $cta$  sobre el disco  $A$ , y la evolvente  $btd$  sobre el disco  $B$ . El punto de trazado está siempre sobre la tangente a las circunferencias  $A$  y  $B$  (llamadas circunferencias base), y dicha tangente es siempre normal a los perfiles del diente en sus puntos de contacto; de aquí que  $p$  sea el polo, y  $A_p$  y  $B_p$  sean los radios de las circunferencias primitivas. La presión transmitida entre los flancos de los dientes actuará siempre según la normal común; de aquí que el ángulo de presión  $\varphi$  sea constante. La relación de velocidades angulares está dada por la ecuación:

$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{B_p}{A_p} = \frac{R_B}{R_A} = cte$$

Por lo tanto cambiándose la distancia entre centros  $A_p B$  no se altera la relación de velocidades ni se modifica el correcto funcionamiento de los perfiles de evolvente, sí cambian los diámetros primitivos y el ángulo de presión. La posibilidad de variar la distancia entre centros sin alterar el buen funcionamiento de los perfiles, constituye una importante propiedad de los engranajes de evolvente. En la práctica las circunferencias base y las distancias entre centros, se eligen de modo de obtener valores particulares del ángulo de presión, que generalmente es de  $14^{\circ}\frac{1}{2}$  o  $20^{\circ}$ .









## **COMPARACIÓN ENTRE LAS RUEDAS DE PERFIL CICLOIDAL Y DE EVOLVENTE**

Las ruedas dentadas con dientes de perfil cicloidal tienen respecto a las de perfil de evolvente las siguientes ventajas e inconvenientes más notorios:

### **Ventajas**

1. Siempre una curva convexa engrana con una cóncava (epicicloide con hipocicloide), de manera que la superficie de contacto es mayor, el contacto es más íntimo y más suave; el desgaste es mucho menor que en los engranajes de evolvente, donde ambas curvas son convexas.
2. El engrane se verifica correctamente (sin interferencias) con un número más reducido de dientes.

### **Inconvenientes**

1. La distancia entre los ejes de las ruedas debe ser exactamente igual a la suma de los radios primitivos que han sido tomados como base para el tallado de los dientes, en caso contrario quedan desplazados los perfiles al desplazarse relativamente los puntos de inflexión y el engrane no se verifica entonces entre puntos correspondientes de los perfiles conjugados, desapareciendo las bondades del contacto que se enunciaron al considerar el engrane entre curvas de curvatura en el mismo sentido.  
Este tipo de ruedas dentadas requiere en consecuencia, montajes muy precisos, mientras que en las ruedas de evolvente aún cuando se modifique la distancia entre ejes por causas fortuitas o montaje deficiente el engrane se conserva correcto.
2. El perfil del diente consta de dos curvas, con curvaturas en sentido contrario, ello dificulta su tallado. El perfil de evolvente tiene curvatura en un solo sentido, lo que permite su fabricación con relativa facilidad y exactitud.
3. A igualdad de paso los dientes de evolvente resultan en general más gruesos en la raíz que los dientes cicloidales.

Por las razones expuestas y por el hecho de que las ruedas de evolvente pueden fabricarse en forma masiva con las máquinas herramientas de generación, el tipo de rueda cicloidal ha sido desechada de la mecánica general y su empleo ha quedado reducido a trabajos de precisión (relojería).

Invencción de los dientes de engranajes.- Su forma actual es fruto de una gradual evolución del engranaje de forma primitiva. La más remota noticia que tenemos de un estudio del problema del movimiento uniforme por engranaje de dientes y su solución, data del tiempo de Olaf Roemer, célebre astrónomo danés, quien en 1674 propuso la forma epicicloide para obtener el movimiento uniforme. Evidentemente, fue Robert Willis, profesor de la Universidad de Cambridge, el primero que dio aplicación práctica al principio de la curva epicicloide para obtener una serie intercambiable de engranajes. Willis reconoció a Camus la paternidad de la idea de la intercambiabilidad de engranajes, pero reclamó para el mismo el mérito de su primera aplicación. El diente de evolvente fue sugerido teóricamente por los primeros científicos y matemáticos, pero quedó para Willis el presentarlo en forma práctica. Quizá, la primera concepción de la aplicación de esta forma de dientes para engranajes corresponde al francés Felipe de Labire, quien en teoría la consideró igualmente conveniente que la epicicloide para el perfil de los dientes. Esto sucedía hacia 1695, y poco después, Roemer demostró, por primera vez, la curva epicicloide. La aplicabilidad de la evolvente fue, además, expuesta por Leonardo Euler, matemático de Basilea, nacido en 1707, a quien Willis reconoce como el primero en sugerirla. Por su parte Willis ideó el odontógrafo que lleva su nombre para realizar los dientes de evolvente. El ángulo de presión de  $14.5^\circ$  fue escogido por tres razones diferentes. Primera, porque su seno es aproximadamente igual a 0.25; lo que facilita cálculo; segunda, porque este ángulo casi coincide con el ángulo de presión que resulta de



la construcción usual de los dientes de engranaje epicicloide; tercera, porque el ángulo del flanco recto de la cremallera en evolvente es el mismo que la inclinación de la rosca de 29°.

de OBER - JONES “Manual Universal de la TECNICA MECANICA”

**TRENES DE ENGRANAJES**

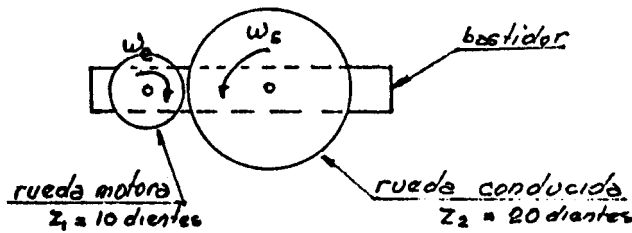
El acoplamiento de dos o más engranajes es lo que se denomina TREN DE ENGRANAJES. Cuando estos giran alrededor de ejes fijos al bastidor de la máquina se obtiene un TREN COMÚN y la relación de transmisión es:

$$\frac{\omega_e}{\omega_s} = i = \frac{\text{producto de los } n^\circ \text{ de dientes de los engr. conducidos}}{\text{producto de los } n^\circ \text{ de dientes de los engr. motores}} (*)$$

Donde:  $\omega_e$  es la velocidad angular del engranaje de entrada (motor) y  $\omega_s$  la velocidad angular del engranaje de salida (conducido).

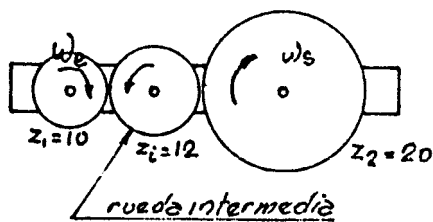
Los trenes comunes pueden ser SIMPLES o COMPUESTOS.

Son simples cuándo todas las ruedas están sobre un mismo plano, cada eje sustenta un solo engranaje, los engranajes intermedios no modifican la relación de transmisión entre las ruedas extremas, solo el sentido de rotación.



$$i = \frac{\omega_e}{\omega_s} = -\frac{20}{10} = -\frac{2}{1}$$

El signo (-) por el distinto sentido de rotación



$$i = \frac{\omega_e}{\omega_s} = \frac{12 \times 20}{10 \times 12} = \frac{2}{1}$$

La rueda intermedia en un caso es conducida y en el otro caso es motora.

En general se puede decir que para trenes de engranajes comunes simples el sentido de rotación de la rueda de entrada y de salida coinciden cuando el número de ruedas acopladas es impar y son de sentido contrario cuando es par.

(\*) Esta expresión surge de considerar que la velocidad tangencial de dos ruedas acopladas debe ser idéntica:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \therefore \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$



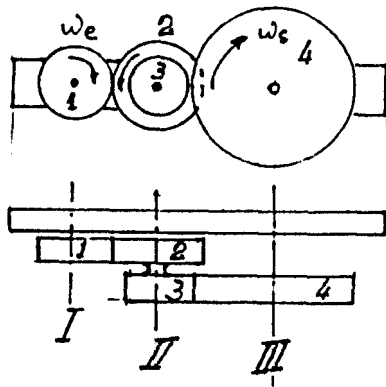
Como la relación de radios es igual a la relación de diámetros y esta igual a la de dientes ya que el módulo  $M = \frac{D(mm)}{Z}$  o el paso diametral  $P = \frac{Z}{D(')}$  deben ser iguales para posibilitar el engrane

se tiene:  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$

Se extiende luego el razonamiento hasta llegar a la ultima rueda conducida.

Siendo  $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$ ;  $n = r.p.m.$  unidad usada en la técnica, es  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$

En los trenes comunes compuestos sobre alguno de los ejes intermedios puede haber más de un engranaje, unidos solidariamente. El movimiento se realiza en varios planos.



$$Z_1 = 10; Z_2 = 12; Z_3 = 8; Z_4 = 20$$

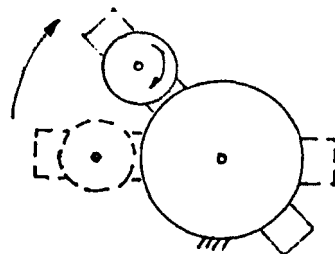
$$i = \frac{\omega_e}{\omega_s} = \frac{Z_2 \times Z_4}{Z_1 \times Z_3} = \frac{12 \times 20}{10 \times 8}$$

$$i = \frac{3}{1}$$

El sentido de giro de la rueda de salida con respecto a la de entrada en este caso depende del número de ejes, será igual cuando el número de ejes es impar y diferente para un número de ejes par.

Si se fija uno de los ejes de un tren común y todas las ruedas e inclusive el brazo o bastidor se hacen girar alrededor de el, se obtiene lo que se denomina un TREN EPICICLOIDAL O PLANETARIO.

Este tipo de tren de engranajes será el motivo de nuestro estudio.



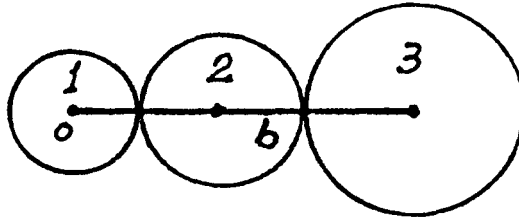
En la figura puede apreciarse como el primer tren común simple presentado ha sido transformado en un tren epicicloidal. Es de hacer notar que no necesariamente debe enclavarse la rueda montada sobre el eje fijo, esta puede girar independientemente del brazo accionada exteriormente, el único que debe permanecer fijo es el eje.



Existen dos métodos clásicos para el estudio de los trenes de engranajes epicicloidales, la fórmula de Willis y el Método Tabular, ambos se basan en el hecho de que el movimiento absoluto de cualquier rueda del tren es igual al movimiento de la rueda relativo al brazo más el movimiento del brazo.

### FÓRMULA DE WILLIS

Sea el tren epicicloidal de la figura



Y sean  $\omega_b$ ;  $\omega_1$ ;  $\omega_2$ ;  $\omega_3$  las velocidades absolutas respecto a  $O$  (fijo).

Y sean  $\omega_{1/b}$ ;  $\omega_{2/b}$ ;  $\omega_{3/b}$  las velocidades relativas respecto al brazo.

Se tiene:

$$\omega_1 = \omega_{1/b} + \omega_b \therefore \omega_{1/b} = \omega_1 - \omega_b$$

$$\omega_3 = \omega_{3/b} + \omega_b \therefore \omega_{3/b} = \omega_3 - \omega_b$$

Dividiendo m.a.m.:

$$\frac{\omega_{1/b}}{\omega_{3/b}} = \frac{\omega_1 - \omega_b}{\omega_3 - \omega_b}; \quad \text{siendo} \quad \frac{\omega_{1/b}}{\omega_{2/b}} = i$$

Se tiene:

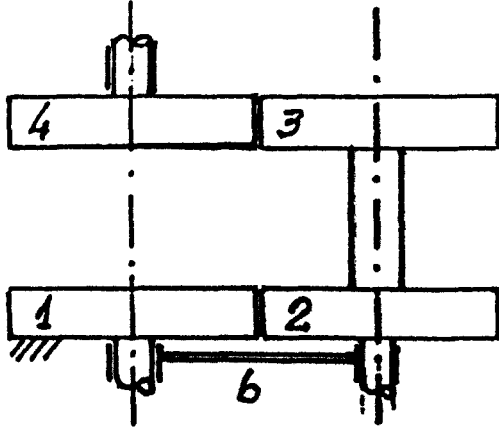
$$i = \frac{\omega_1 - \omega_b}{\omega_3 - \omega_b} \quad \text{o} \quad i = \frac{\omega_e - \omega_b}{\omega_s - \omega_b} \quad \text{o} \quad i = \frac{n_e - n_b}{n_s - n_b}$$

Habiendo llamado a una de las ruedas de entrada y a la otra de salida, siendo  $i$  la relación de transmisión entre las mismas como tren común (con su signo), que es como se presenta la fórmula de Willis.

Se observa que es necesario aplicar tantas veces la fórmula como ruedas del mecanismo quiera estudiarse su movimiento.



**Ejemplo:** Reductor epicicloidal - Se pretende conocer el movimiento de la rueda 4 cuando el brazo da una vuelta.



$$Z_1 = 101; Z_2 = 100; Z_3 = 99; Z_4 = 100$$

$$i = e \quad 4 = s \quad n_e = 0 \quad n_b = 1$$

$$i = \frac{n_1}{n_4} = \frac{Z_2 \times Z_4}{Z_1 \times Z_3} = \frac{100 \times 100}{101 \times 99} = \frac{10.000}{9.999}$$

$$i = \frac{n_e - n_b}{n_s - n_b} = \frac{10.000}{9.999} = \frac{0 - 1}{n_s - 1}$$

$$\therefore n_s = \frac{10.000 - 9.999}{10.000} = \frac{1}{10.000}$$

### MÉTODO TABULAR

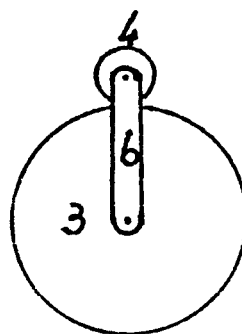
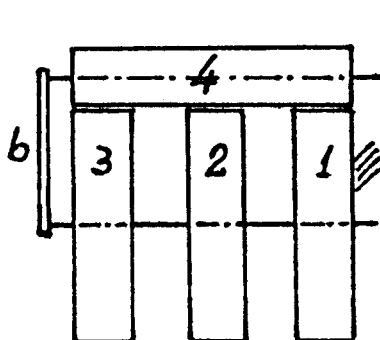
Consiste el método en tabular los movimientos de cada uno de los elementos del tren en dos condiciones particulares: 1) Bloqueando todas las ruedas al brazo y haciendo girar este alrededor del eje fijo un determinado número de vueltas en un sentido que consideramos positivo, este es el movimiento del brazo; y 2) Desbloqueando el mecanismo y manteniendo fijo el brazo se hace girar la rueda de entrada tantas vueltas en un determinado sentido, de tal manera que la suma de este movimiento con el provocado en la condición (1) de como resultado el movimiento establecido para esta rueda como dato del problema. Se calculan los movimientos de las demás ruedas del tren considerado ahora como tren común, este es el movimiento de las ruedas relativo al brazo.

La suma de los movimientos experimentados en las dos condiciones nos dará el movimiento absoluto de cada uno de los elementos del tren.

Un caso práctico nos aclarará el procedimiento.

### Ejemplo:

El siguiente mecanismo se conoce como la PARADOJA DE FERGUSON



$$Z_1 = 100$$

$$Z_2 = 101$$

$$Z_3 = 99$$

$$Z_4 = 20$$



El engranaje 1 está fijo, cuando se hace girar el brazo una vuelta en un sentido cualquiera, el engranaje 4 rueda sobre el 1 y arrastra a las ruedas 2 y 3 cuyo movimiento se quiere determinar. Apliquemos el método:

Elemento \ Movimiento	b	1	2	3	4
Movimiento con el brazo	+1	+1	+1	+1	+1
Movimiento relativo al brazo	0	-1	$-\frac{Z_1}{Z_2}$	$-\frac{Z_1}{Z_3}$	$+\frac{Z_1}{Z_4}$
Movimiento total	+1	0	$1 - \frac{Z_1}{Z_2}$	$1 - \frac{Z_1}{Z_3}$	$1 - \frac{Z_1}{Z_4}$

Tomando los resultados de la última línea, que corresponden al movimiento absoluto de cada uno de los elementos del tren, se tiene reemplazando valores:

Cuando b gira una vuelta en sentido positivo:

La rueda 1 está quieta.

La rueda 2 gira  $1 - \frac{Z_1}{Z_2} = 1 - \frac{100}{101} = \frac{1}{101} = \frac{1}{100}$  de vuelta en sentido (+).

La rueda 3 gira  $1 - \frac{Z_1}{Z_3} = 1 - \frac{100}{99} = -\frac{1}{99} = -\frac{1}{100}$  de vuelta en sentido (-).

He aquí el hecho paradójal que da el nombre al mecanismo.

La rueda 4 por último gira  $1 + \frac{Z_1}{Z_4} = 1 + \frac{100}{20} = 6$  vueltas en sentido (+).

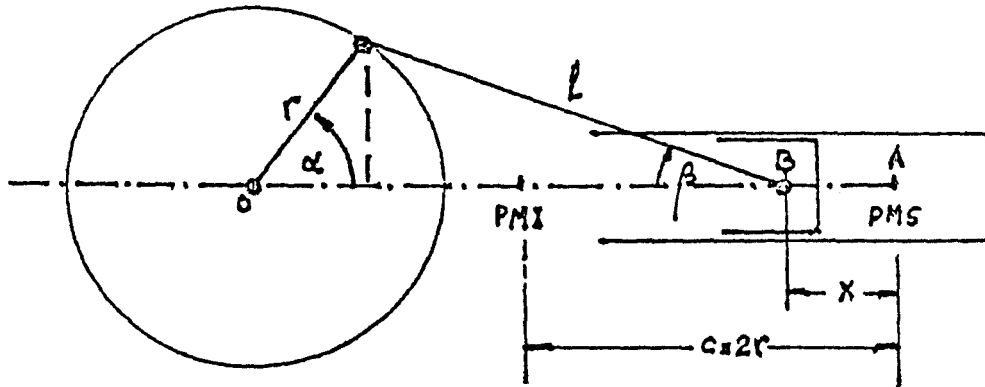
Se observa la ventaja del método tabular sobre la fórmula de Willis, aquí se ha encontrado de una sola vez el movimiento de todas las ruedas del tren, mientras que por el método anterior deberíamos haber aplicado tres veces la fórmula de Willis.



## ESTUDIO CINEMÁTICO DEL MECANISMO BIELA MANIVELA

Este mecanismo es una variación del mecanismo de cuatro barras en el cual se ha reemplazado un par de rotación por uno de deslizamiento.

El mecanismo ampliamente difundido se aplica en motores alternativos, bombas, compresores, etc.



### Cálculo de los desplazamientos:

$$x = OA - OB \quad OA = r + l \quad OB = r \cdot \cos \alpha + l \cdot \cos \beta$$

$$x = r + l - (r \cdot \cos \alpha + l \cdot \cos \beta) = r(1 - \cos \alpha) + l(1 - \cos \beta)$$

$$r \cdot \operatorname{sen} \alpha = l \cdot \operatorname{sen} \beta \therefore \operatorname{sen} \beta = \frac{r}{l} \cdot \operatorname{sen} \alpha = \lambda \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha} \quad (a - b)^n = a^n - na^{n-1}b$$

$$(1 - \lambda^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{1}{8} \cdot \lambda^4 \cdot \operatorname{sen}^4 \alpha - \dots$$

Tomando los dos primeros términos serie muy convergente:

$$x = r(1 - \cos \alpha) + l \left( \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha \right)$$

$$x = r \left( 1 - \cos \alpha + \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha \right) \therefore \alpha = \omega t$$

$$x = r \left( 1 - \cos \omega t + \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \operatorname{sen}^2 \omega t \right)$$



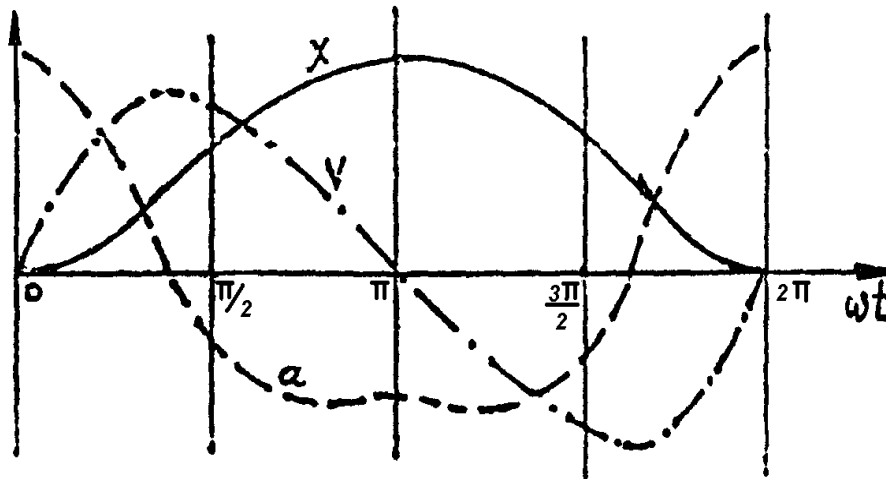
**Cálculo de las velocidades y aceleraciones del pie de biela:**

$$V = \frac{dx}{dt} = r \cdot \omega \left( \text{sen } \omega \cdot t + \lambda \cdot \text{sen } \omega \cdot t \cdot \cos \omega \cdot t \right)$$

$$V = r \cdot \omega \left( \text{sen } \omega \cdot t + \frac{1}{2} \lambda \cdot \text{sen } 2\omega \cdot t \right)$$

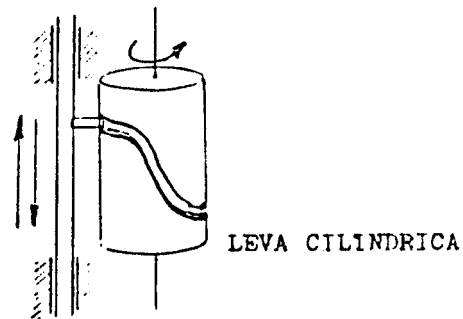
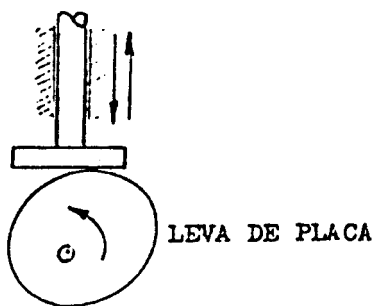
$$a = \frac{dV}{dt} = r \cdot \omega^2 \left( \cos \omega \cdot t + \lambda \cdot \cos 2\omega \cdot t \right)$$

**Representación gráfica:**



**MECANISMOS DE LEVAS**

Las levas en general permiten transformar un movimiento de rotación en alternativo. Como puede darse al contorno de la leva infinidad de formas se obtienen también infinidad de movimientos. La leva de placa (radial) mueve a la pieza empujada en dirección perpendicular al eje de rotación de la leva.



En la leva cilíndrica el movimiento de la pieza conducida se produce paralelamente al eje de rotación. La leva y seguidor constituyen en general un par superior y por lo general abierto, lo que hace necesario una fuerza exterior para mantener el contacto de las piezas sobre todo en la carrera de retroceso. El seguidor en su contacto con la leva puede ser de las siguientes formas:

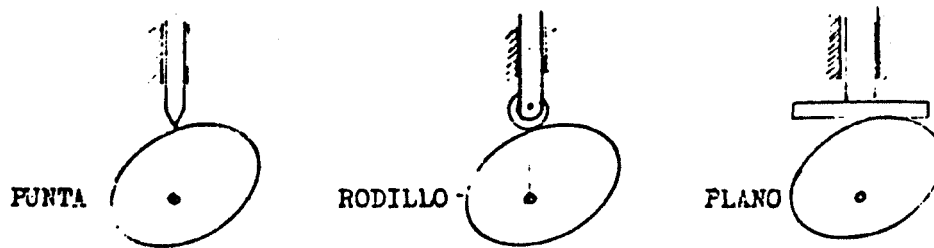




**Borde agudo o filo:** no son utilizados en la práctica debido al elevado desgaste ocasionado por las tensiones de contacto.

**Seguidor a rodillo:** tiene la ventaja de la rodadura pero por acción recíproca con la leva da lugar a empujes importantes sobre las guías del seguidor.

**Seguidor plano:** si bien tiene el inconveniente del deslizamiento los empujes laterales sobre las guías del seguidor se reducen notablemente. La forma del seguidor impone una limitación al perfil de la leva.



Es importante que el movimiento del seguidor sea tal que su velocidad, aceleración y pulso presenten determinadas características a fin de evitar desgastes y vibraciones en particular en los dispositivos de alta velocidad.

El movimiento del seguidor puede ser estudiado representando la alzada del mismo en función del tiempo  $y = f(t)$ ; si la leva tiene movimiento de rotación constante  $\omega = cte$ , el ángulo girado por ella será  $\theta = \omega \cdot t$  y los desplazamientos pueden representarse en función de  $\theta$  y  $y = f(\theta)$ .

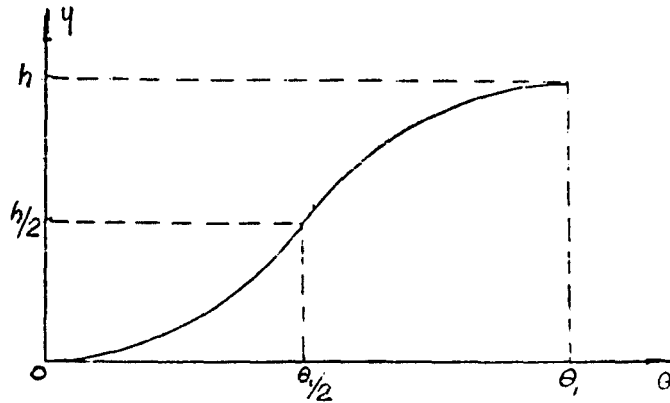
Las funciones básicas que se han adoptado para el movimiento del seguidor pueden agruparse en dos categorías:

- 1) Las POLINÓMICAS entre las que se encuentran las de velocidad constante, aceleración constante; pulso constante, etc.
- 2) Las TRIGONOMÉTRICAS entre las que se incluyen las armónicas y la cicloidal.

Dado los alcances del curso solo analizaremos las levas PARABÓLICA, ARMÓNICA y CICLOIDAL.

### LEVA PARABÓLICA

La ley de alzada corresponde a dos arcos de parábola tangentes a la mitad de la alzada, punto que se produce para una rotación  $\frac{\theta_1}{2}$  semiángulo de la leva. ( $\theta_1 = \text{ángulo de la leva}$ ).



Para el movimiento entre  $\theta = 0$  y  $\theta = \theta_1/2$  la ley de alzada será:

$$y = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Siendo:  $\theta = \omega \cdot t$  es  $t = \frac{\theta}{\omega}$  lo que nos da  $y = \frac{1}{2} a \left( \frac{\theta}{\omega} \right)^2$  para  $\theta = \theta_1/2$  según se dijo debe ser

$y = h/2$  valores que remplazados en la ecuación anterior da  $h/2 = \frac{1}{2} a \left( \frac{\theta_1}{2\omega} \right)^2$  que nos permite

despejar  $a = h \frac{4\omega^2}{\theta_1^2}$  y escribir  $y = 2h \left( \frac{\theta}{\theta_1} \right)^2$ .

La velocidad será:  $v = \frac{dy}{dt} = 4h\omega \frac{\theta}{\theta_1^2}$

Y la aceleración:  $a = \frac{d^2y}{dt^2} = 4h\omega^2 \frac{1}{\theta_1^2}$

Todo para:  $0 \leq \theta \leq \theta_1/2$

A partir del punto medio la ley de alzada del seguidor será de la forma:

$$y = \frac{h}{2} + v_i \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Donde  $v_i$  es la velocidad inicial en este punto, igual a la final de la primera etapa que para

$\theta = \theta_1/2$  da  $v_i = 2h\omega/\theta_1$  y el tiempo contado a partir de este instante será  $t = \frac{\theta - \theta_1/2}{\omega}$  valores que reemplazados en la ley de alzada da:

$$y = \frac{h}{2} + 2h \frac{\omega}{\theta_1} \cdot \frac{\theta - \theta_1/2}{\omega} + \frac{1}{2} a \left( \frac{\theta - \theta_1/2}{\omega} \right)^2$$



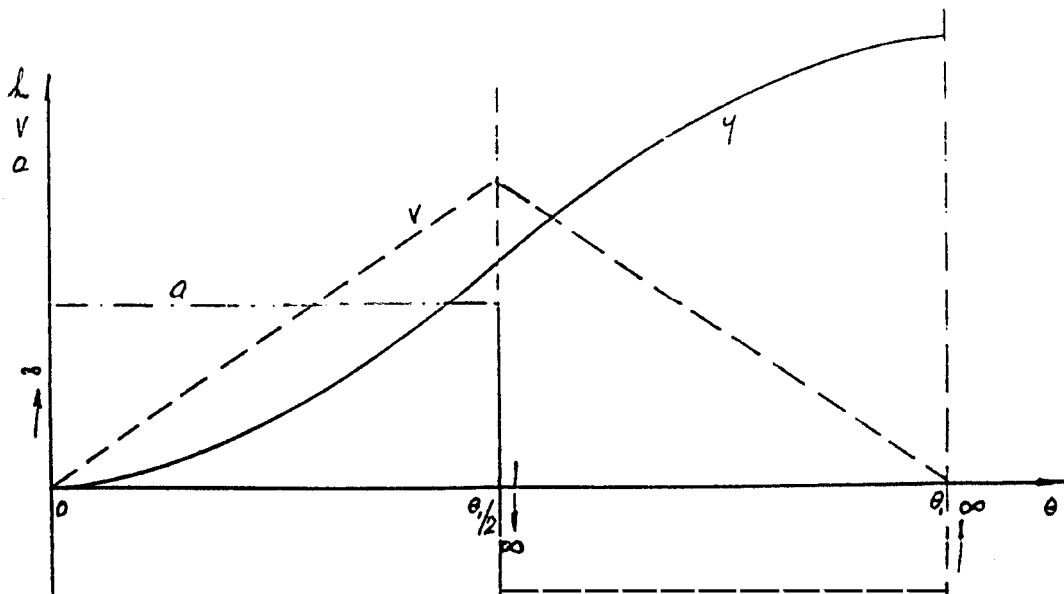
Que para  $\theta = \theta_1$  da  $h = \frac{h}{2} + h + \frac{1}{2}a\left(\frac{\theta_1}{2\omega}\right)^2$  de donde se puede despejar la aceleración  $a = -4h\frac{\omega^2}{\theta_1^2}$  que reemplazada en la ecuación de los desplazamientos y operando se tiene:

$$y = h\left(1 - 2\left(1 - \frac{\theta}{\theta_1}\right)^2\right)$$

Que es la ecuación de los desplazamientos para  $\theta_1/2 \leq \theta \leq \theta_1$

La velocidad es:  $v = \frac{dy}{dt} = \frac{4h\omega}{\theta_1}\left(1 - \frac{\theta}{\theta_1}\right)$  y la aceleración ya encontrada vale  $a = \frac{d^2y}{dt^2} = -4h\frac{\omega^2}{\theta_1^2}$

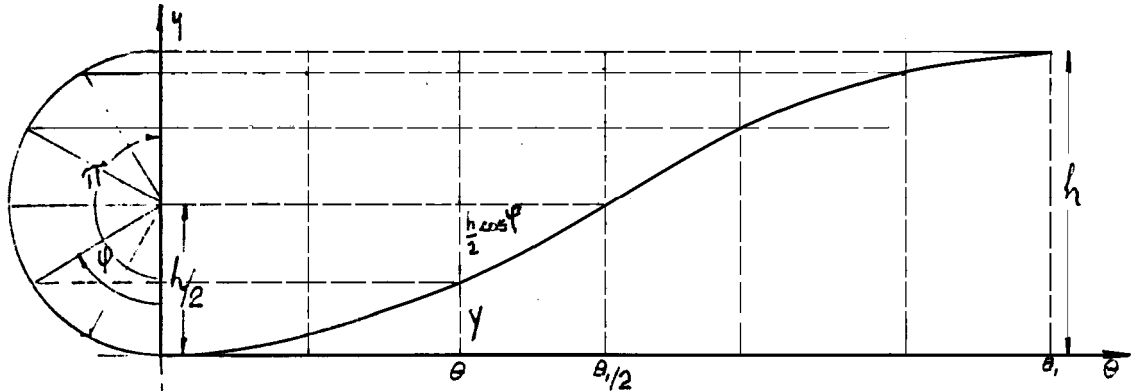
De la observación de las curvas características se desprende que la aceleración de módulo constante y el menor valor teórico de todas las levas, presenta la condición indeseable de ser discontinua al inicio, en el punto de transición y al final del desplazamiento, lo que hace el pulso de valor cero salte en estos puntos a valores infinitos.





## LEVA ARMÓNICA

Las alzadas son proporcionales a las elongaciones de un movimiento armónico.



$$y = \frac{h}{2} - \frac{h}{2} \cos \varphi = \frac{h}{2} (1 - \cos \varphi)$$

Para un ángulo  $\pi$  en el movimiento armónico corresponde  $\theta_1$  en giro de leva.

Para un ángulo  $\varphi$  en el movimiento armónico corresponde  $\theta$  en giro de leva.

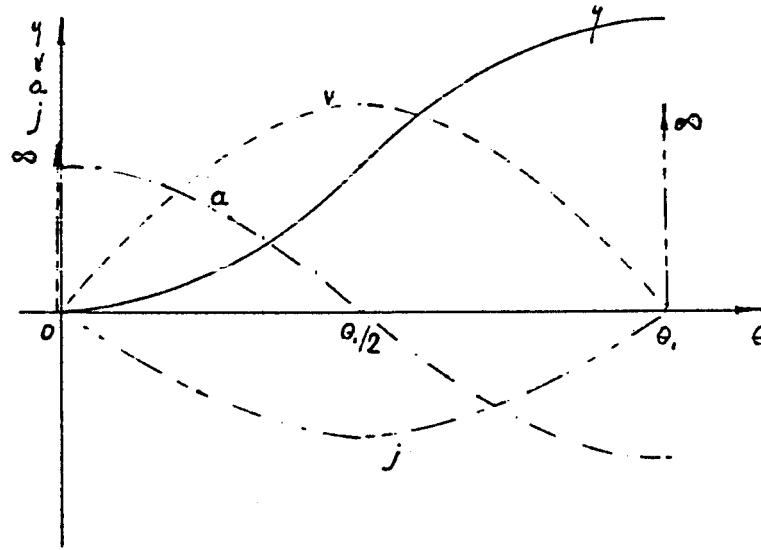
Por lo tanto  $\frac{\pi}{\varphi} = \frac{\theta_1}{\theta}$  luego  $\varphi = \frac{\pi\theta}{\theta_1}$  con lo cual:

$$y = \frac{h}{2} \left( 1 - \cos \frac{\pi\theta}{\theta_1} \right)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{h\pi\omega}{2\theta_1} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\theta_1}$$

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{h\pi^2\omega^2}{2\theta_1^2} \cos \frac{\pi\theta}{\theta_1}$$

$$\text{Pulso } j = -\frac{h\pi^3\omega^3}{2\theta_1^3} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\theta_1}$$

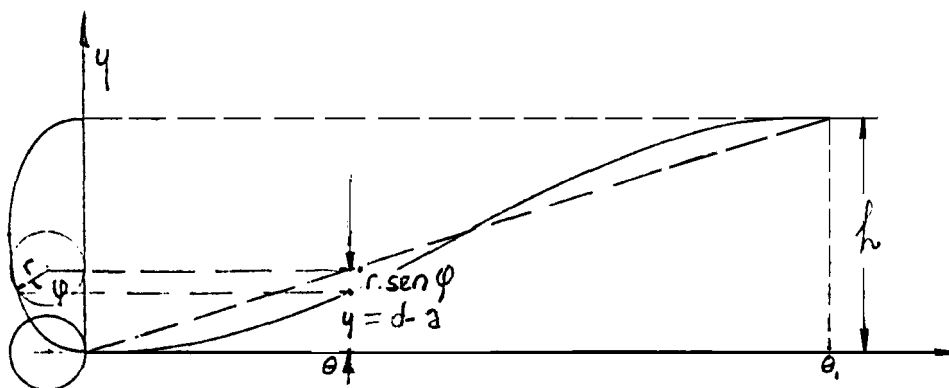


Esta leva presenta la más baja aceleración pico  $v$  muy pequeño ángulo de presión; la velocidad y la aceleración están representadas por curvas senoidales y cosenoidales sin discontinuidad en el punto de inflexión.

Presenta pulso infinito en los extremos, inconveniente para altas velocidades; se las prefiere cuando se puede igualar la aceleración tanto al inicio como al final con la aceleración de los perfiles adyacentes.

### LEVA CILOIDAL

Las alzadas corresponden a las proyecciones sobre el eje de ordenadas de las posiciones de un punto que describe una cicloide de amplitud igual a la alza máxima, al rodar la circunferencia generadora sobre el eje "y".



$$y = \frac{h}{\theta_1} \theta - r \cdot \text{sen} \varphi \quad 2\pi \cdot r = h \quad r = \frac{h}{2\pi}$$

$$\text{para } \theta = \theta_1 \quad \varphi = 2\pi \text{ luego } = \frac{2\pi\theta}{\theta_1}$$

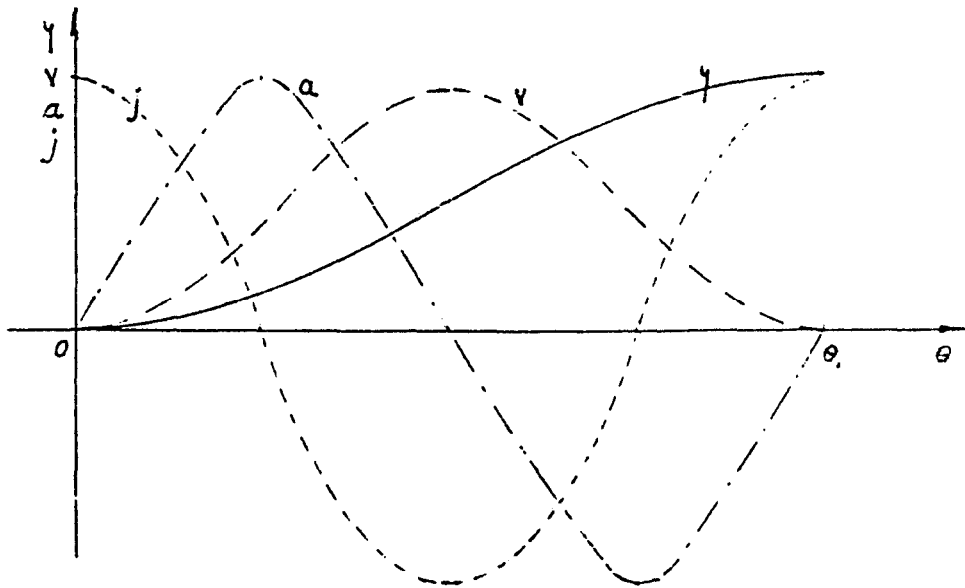
$$\text{De donde: } y = \frac{h}{\pi} \left( \frac{\pi\theta}{\theta_1} - \frac{1}{2} \text{sen} \frac{2\pi\theta}{\theta_1} \right)$$



La velocidad resulta:  $v = \frac{h\omega}{\theta_1} \left( 1 - \cos \frac{2\pi\theta}{\theta_1} \right)$

La aceleración:  $a = \frac{2\pi h\omega^2}{\theta_1^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi\theta}{\theta_1}$

Y el pulso:  $j = \frac{4\pi^2 h\omega^3}{\theta_1^3} \cos \frac{2\pi\theta}{\theta_1}$



El pulso resulta finito en todos los puntos, lo que es una importante ventaja. Este es uno de los mejores movimientos normalizados porque la aceleración es cero al principio y final de la elevación, lo que lo hace especialmente apto para acoplar a un reposo en cada extremo.

Resumiendo las características de las levas estudiadas podemos decir:

1. La leva parabólica da el valor máximo más reducido posible de la aceleración pero tiene la propiedad indeseable de producir cambios repentinos del valor al principio, la mitad y al final de la elevación.
2. La leva armónica produce un cambio gradual en el valor de la aceleración salvo al principio y final de la acción de la leva.
3. La leva cicloidal da un valor máximo de la aceleración más elevado que las otras, pero su valor no cambia bruscamente.

### **COMO TRAZAMOS LA LEVA**

A partir de una circunferencia base de radio arbitrario, se toman en forma radial, para diferentes ángulos de rotación de la leva, cada  $5^\circ$  por ejemplo, las alzadas correspondientes de acuerdo a la ley deseada.

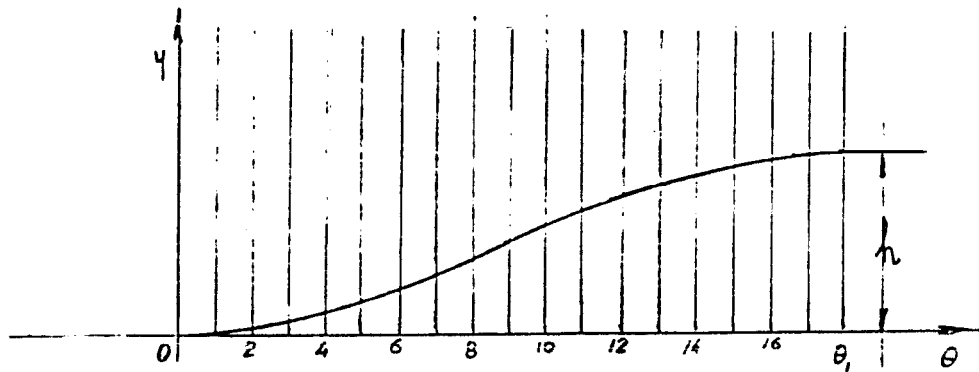
La curva continua que une dichos puntos se denomina CURVA PRIMITIVA y es la superficie de la leva si el seguidor es de punta.

Si el seguidor es plano, por cada uno de los puntos obtenidos se traza una perpendicular al radio, que en este caso representa el eje del seguidor y la perpendicular trazada es la posición de la base o

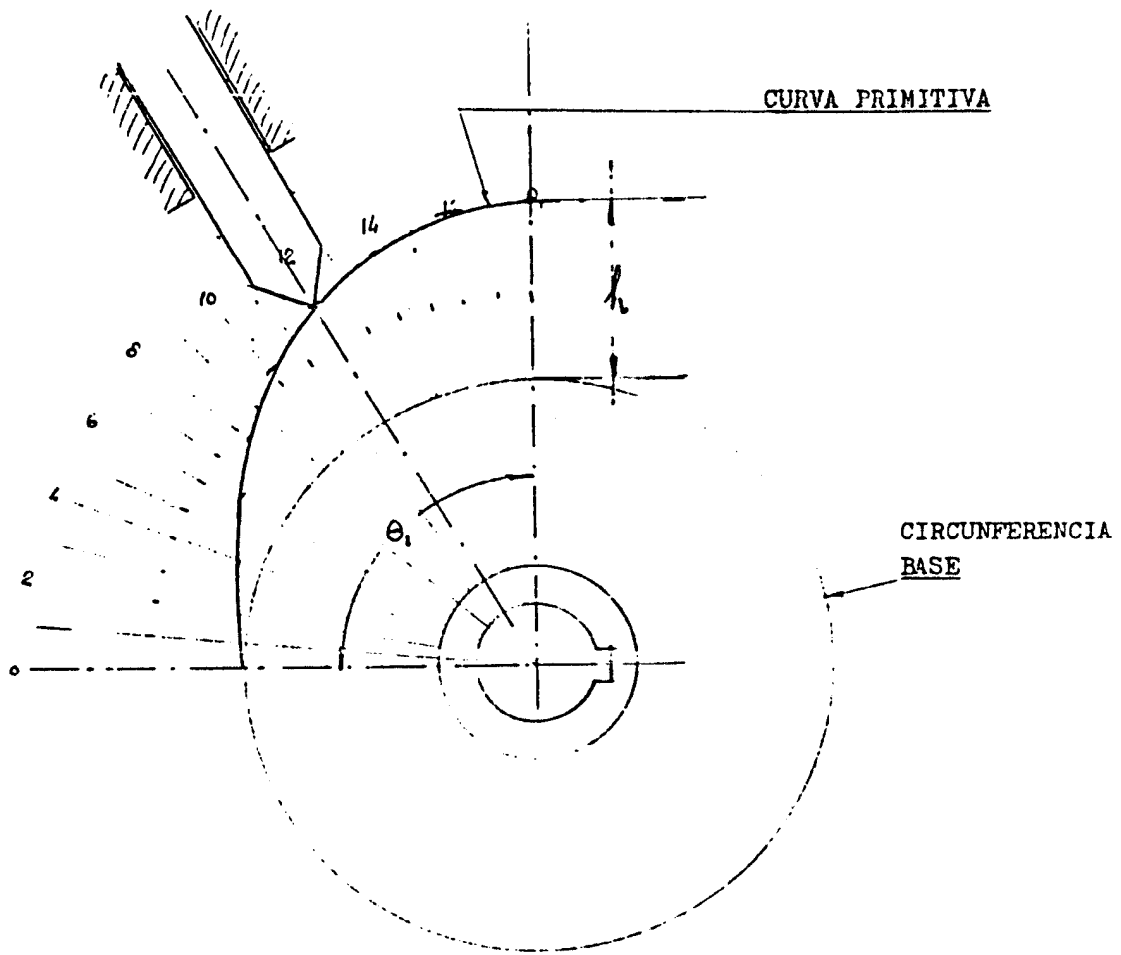


plátano del mismo para ese instante y son las sucesivas tangentes al perfil de la leva, de tal manera que para obtener este es suficiente con trazar la envolvente de todas estas tangentes.

Si el seguidor es a rodillo, a cada alzada tomada sobre la circunferencia base debemos agregar el radio del rodillo, obteniendo así la ubicación para cada punto del centro de aquel, de tal manera que el perfil de la leva en este caso se obtiene como la curva tangente a todas las circunferencias de radio igual al del rodillo trazadas en dichos puntos.

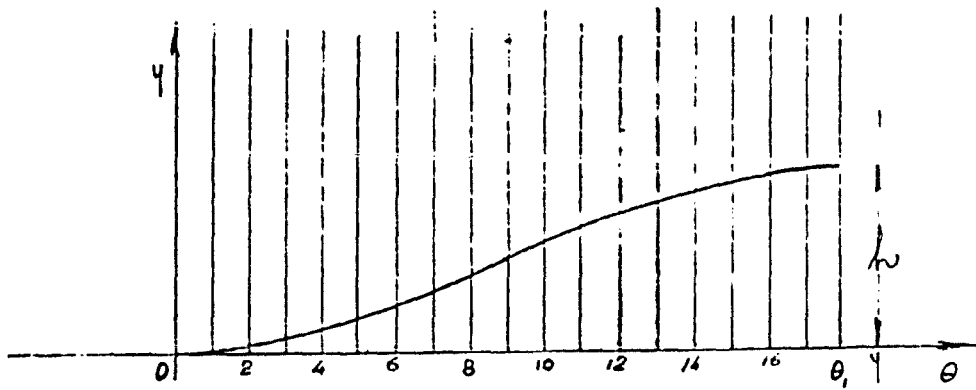


LEY DE ALZADA

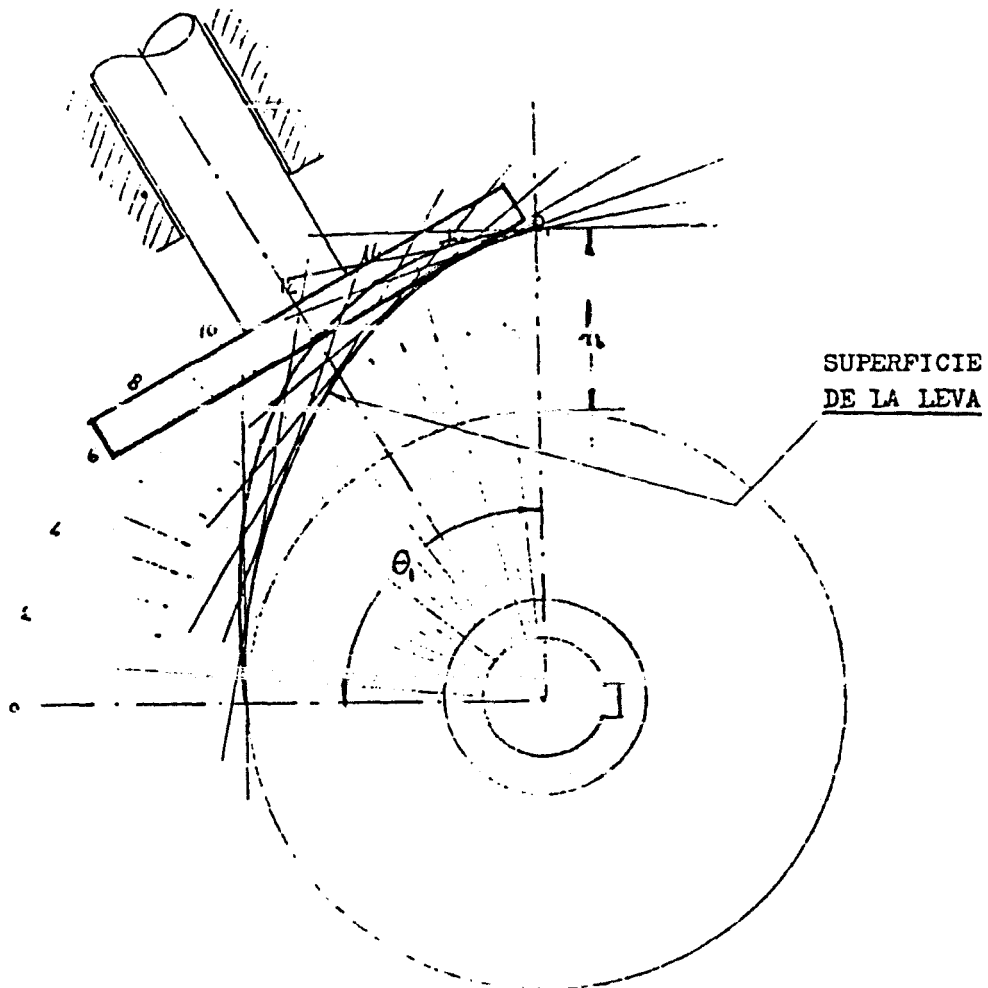


SEGUIDOR EN PUNTA

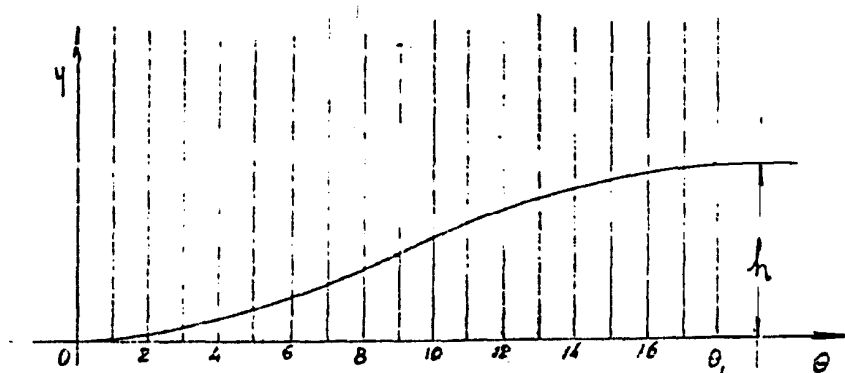




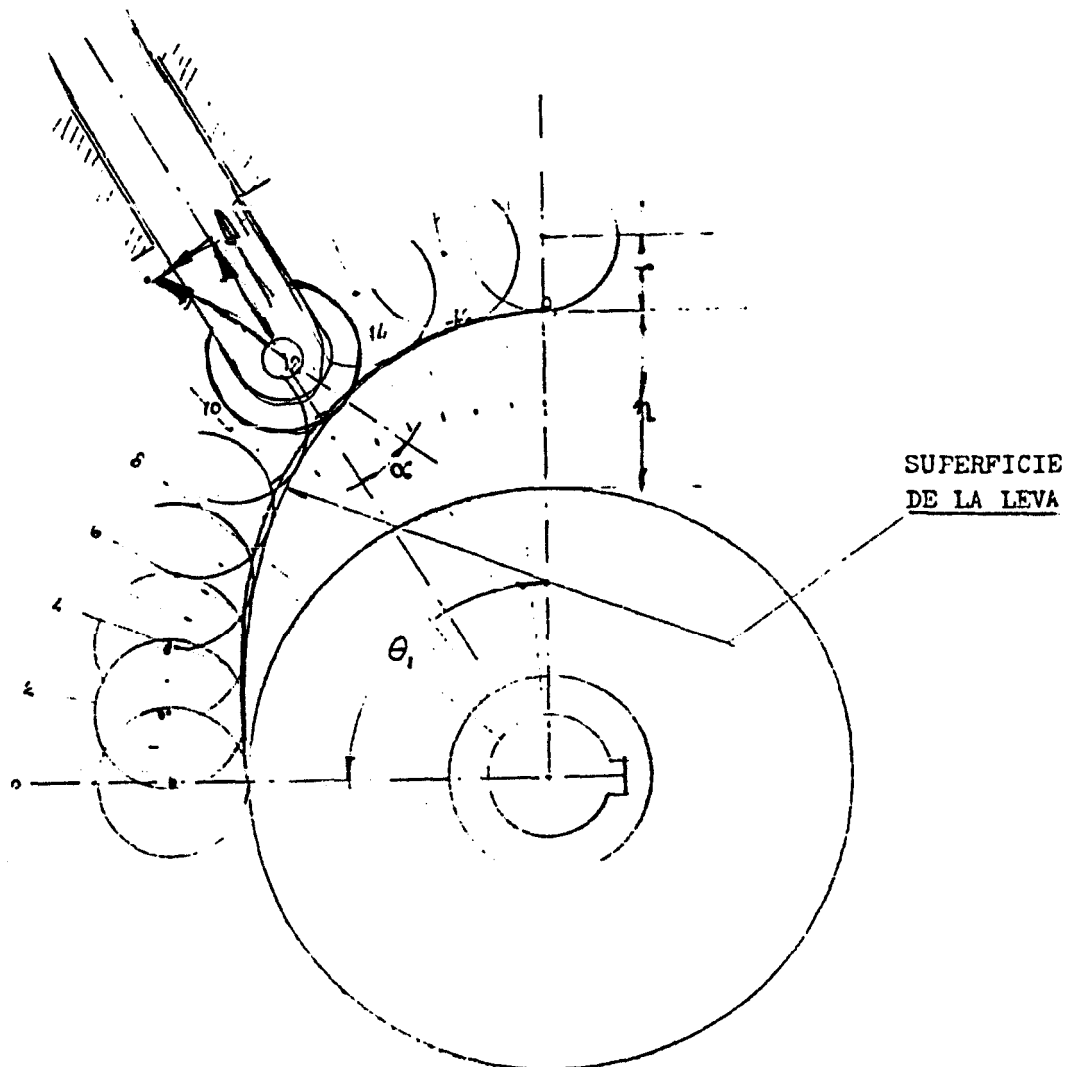
LEY DE ALZADA



SEGUIDOR PLANO O A PLATILLO



LEY DE ALZADA



SEGUIDOR A RODILLO  
 $\alpha$  ángulo de presión